

Exercice 1. (8 points)

1. On considère le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } 0 \leq x \leq 2, y \leq 1, x^2 + (y - 1)^2 \geq 1, 0 \leq y \leq (x - 2)^2\}.$$

- Faire une figure représentant D .
 - Exprimer à l'aide d'intégrales simples en x et en y l'intégrale double $\int \int_D f(x, y) dx dy$.
 - On suppose que la masse surfacique de D est $\mu(x, y) = x$. Calculer la masse totale de D , en utilisant une des expressions précédentes.
2. Soit $\mathcal{C}$ le bord de D orienté dans le sens trigonométrique.
- Paramétrer la courbe $\mathcal{C}$.
 - Calculer la circulation du champ de vecteurs $\vec{V} = (0, x^2)$ le long de la courbe $\mathcal{C}$.
 - Retrouver la masse totale de D en utilisant la formule de Green-Riemann.

Exercice 2. (12 points)

1. Soit $\mathcal{V}$ le volume défini par :

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + z \leq 1\},$$

- Faire une figure représentant $\mathcal{V}$.
 - Soit D la projection de $\mathcal{V}$ sur la plan xOy . Faire une figure représentant le domaine D .
 - Exprimer, en utilisant la méthode bâtons, l'intégrale triple $\int \int \int_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dx dy dz$ à l'aide d'une intégrale double sur D ainsi qu'une intégrale simple en z .
 - Calculer le volume de $\mathcal{V}$.
- Indication :** Pensez à utiliser les coordonnées polaires pour calculer l'intégrale double en x et y .
2. Soit Σ la surface suivante :

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + z \leq 1\}.$$

- Paramétrer Σ en utilisant les coordonnées cylindriques.
 - Calculer l'aire de Σ .
 - On oriente Σ par la normale unitaire dont la deuxième composante est positive. Calculer le flux de $\vec{V} = (-x, y, 0)$ à travers la surface Σ .
3. On considère le champ de vecteurs $\vec{U} = (y, x, 0)$.
- Montrer que le champ de vecteurs $\vec{U}$ dérive d'un potentiel scalaire.
 - Soit Γ le bord de la surface Σ . Paramétrer la courbe Γ .
 - Calculer de deux façons différentes la circulation $\vec{U}$ le long de la courbe Γ (on précisera l'orientation choisie).
4. On considère le champ de vecteurs $\vec{W} = (x, y, -xy)$.
- Montrer que $\text{rot}(\vec{W}) = \vec{V}$.
 - Calculer de deux façons différentes la circulation de $\vec{W}$ le long de la courbe Γ (on précisera l'orientation choisie).

Indication : Pensez à utiliser la question 2-(c) et le théorème de Stokes-Ampère.

Rappel

1. Formule de Green-Riemann : Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ de bord $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{C}$ est orienté dans le sens trigonométrique, alors

$$\int_{\mathcal{C}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

2. Masse et longueur d'une courbe : Soit $\mathcal{C}$ une courbe d'équation $\{x(t), y(t), z(t)\}$, $t_0 \leq t \leq t_1$ et de masse curviligne (linéique) $\mu(x, y, z)$, alors

- (a) La masse totale de $\mathcal{C}$ est donnée par formule suivante :

$$m = \int_{t_0}^{t_1} \mu(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

- (b) La longueur de la courbe $\mathcal{C}$ vaut :

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

3. L'aire d'une surface : Soit Σ une surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $\{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\}$, avec $(u, v) \in \Delta$ alors l'aire de Σ est donnée par formule suivante :

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \int \int_{\Sigma} d\sigma = \int \int_{\Delta} \|\vec{T}_u \wedge \vec{T}_v\| du dv$$

4. Flux à travers une surface : Soit Σ une surface orientée suivant le vecteur normal unitaire $\vec{n}_{\Sigma}$. Alors, pour tout champ de vecteurs $\vec{V}$ de $\mathbb{R}^3$, on définit le flux de $\vec{V}$ à travers Σ comme suit

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{V}) = \int \int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{n}_{\Sigma} d\sigma.$$

5. Formule de Stokes-Ampère : Soit Σ une surface de bord Γ . Si Γ est orienté dans le même sens que Σ (via la règle d'Ampère), alors pour tout champ de vecteurs $\vec{V} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ on a

$$\int_{\Gamma} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int \int_{\Sigma} \text{rot}(\vec{V}) \cdot \vec{n} d\sigma.$$

6. Formules trigonométriques :

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)).$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)).$$

$$\sin(2x) = 2 \cos(x) \sin(x).$$