Université de Technologie de Compiègne

MT22 : Juin 2014 - Examen final **Durée : 2h00.** Indiquer clairement le numéro de votre groupe. Les documents et calculatrices sont interdits. Rédiger les 3 exercices sur des feuilles séparées. La clarté et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1. . On considère le domaine V défini par :

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq x^2 + 3y^2,\ \frac{x^2}{3} + z \leq 12\}$$

1. Soit D_1 la projection de V sur le plan (xOz). Représenter D_1 graphiquement, puis, en déduire la forme de V.
2. Soit D_2 la projection de V sur le plan (xOy). Représenter D_2 graphiquement.
   Corrigé : Pour définir le domaine D_2, nous considérons son contour. Ainsi, D_2 est limité par la courbe obtenue par l'intersection des surfaces $z = x^2 + 3y^2, z = 12 - \frac{x^2}{3}$, ce qui donne $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. D'où,
   $$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\}.$$
3. Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Exprimer l'intégrale
   $$I = \iint_{D_2} g(x, y) dy dx,$$
   en coordonnées polaires.
   Corrigé :
   $$I = \iint_{D_2} g(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 g(3r \cos t, 2r \sin t) 6r dr dt.$$
4. Calculer $Vol(V)$.
   Corrigé : .
   $$Vol(V) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\int_{(3r\cos t)^2 + 3(2r \sin t)^2}^{12 - \frac{(3r\cos t)^2}{3}} dz \right) 6r dr dt$$
   $$= 72 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(1 - r^2\right) r dr dt = 144\pi(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = 36\pi.$$

CHANGER DE FEUILLE !

Exercice 2. On considère le champ de vecteurs $V\left(P(x, y), Q(x, y)\right)$ où $P(x, y) = 2x \cos y + x$ et $Q(x, y) = -x^2 \sin y + \alpha g(x)$ où $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction dérivable telle que $g'(x) > 0$.

1. Pour quelles valeurs de α le champ V dérive t-il d'un potentiel scalaire ?
   Corrigé : Comme $P(x, y) = 2x \cos y + x$ et $Q(x, y) = -x^2 \sin y + \alpha g(x)$. Le champ V dérive d'un potentiel scalaire $f(x, y)$ lorsque $rot(V) = 0$ ce qui est équivalent à $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ soit $-2x \sin y + \alpha g'(x) = -2x \sin y$. Ce qui n'est possible que si $\alpha = 0$.
2. On considère le cas où le champ V dérive d'un potentiel scalaire que l'on notera $f(x, y)$. Déterminer $f(x, y)$.
   Corrigé : Pour $\alpha = 0$, on a $V = \left(2x \cos y + x, -x^2 \sin y\right)$ en posant $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = P(x, y)$ et $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = Q(x, y)$ on en déduit que
   $$f(x, y) = -x^2 \cos y + \frac{x^2}{2} + C.$$

3. Soit $g(x) = x$, $\alpha \neq 0$ et D l'intérieur du triangle de sommets $A = (1/2, 0)$, $B = (1, 0)$ et $C = (1, 1)$. Calculer
$$\iint_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dxdy.$$
Corrigé :
$$\iint_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dxdy = \alpha \iint_D dxdy = \alpha Aire(D) = \alpha/4.$$
4. Soit $g(x) = x$. Calculer directement la circulation de V (pour $\alpha \neq 0$) sur les segments (cotés) AB et BC du triangle de sommets $A = (1/2, 0)$, $B = (1, 0)$ et $C = (1, 1)$.
Corrigé :
$$AB = \left\{ \begin{array}{ll} x = t, & t \in [1/2, 1] \\ y = 0 & \end{array} \right. .$$
ainsi $\int_{AB} V.dl = \int_{1/2}^{1} 3t dt = 9/8$.
$$BC = \left\{ \begin{array}{ll} x = 1, & t \in [0, 1] \\ y = t & \end{array} \right. .$$
ainsi $\int_{BC} V.dl = \int_0^1 (\alpha - \sin t) dt = \alpha - 1 + \cos(1)$.
5. En déduire la circulation de V (pour $\alpha \neq 0$) sur le segment CA du triangle de sommets $A = (1/2, 0)$, $B = (1, 0)$ et $C = (1, 1)$.
Corrigé : Soit γ le bord du triangle. Nous avons d'une part
$$\int_\gamma V.dl = \int_{AB} V.dl + \int_{BC} V.dl + \int_{CA} V.dl = 9/8 + \alpha - 1 + \cos(1) + \int_{CA} V.dl.$$
D'autre part, après avoir vérifié les hypothèses du théorème de Green-Riemann, et en désignant par D l'intérieur du triangle, nous avons
$$\int_\gamma V.dl = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dxdy = \alpha \iint_D dxdy = \alpha Aire(D).$$
Ainsi
$$9/8 + \alpha - 1 + \cos(1) + \int_{CA} V.dl = \frac{\alpha}{4}.$$
Ce qui donne
$$\int_{CA} V.dl = \frac{\alpha}{4} - \frac{9}{8} - \alpha + 1 - \cos(1) = -\frac{3\alpha}{4} - \cos(1) - \frac{1}{8}.$$

CHANGER DE FEUILLE !

Exercice 3.

1. On considère la surface Σ définie par
$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tel que} \quad x^2 + y^2 + \frac{z^2}{3} = 1,\ z \geq 0,\ 0 \leq y \leq x \right\}$$
et on appelle Γ le bord de Σ.
   (a) Représenter Σ et Γ graphiquement.
   (b) Paramétrer la courbe Γ.

   Corrigé : On peut voir que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, avec
$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{array}{l} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \\ z = 0 \end{array} \right. \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \quad \Gamma_2 = \left\{ \begin{array}{l} x = \cos(\theta) \\ y = 0 \\ z = \sqrt{3}\sin(\theta) \end{array} \right. \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$
$$\Gamma_3 = \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\theta) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\theta) \\ z = \sqrt{3}\sin(\theta) \end{array} \right. \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

(c) Calculer la masse totale de Γ en supposant que la masse curviligne $\mu(x,y,z) = yz\sqrt{1+2(x^2+y^2)}$.

Corrigé : On utilise la formule de la masse totale d'une courbe, on obtient

$$m = \int_{\Gamma_1} \mu(x,y,z)ds + \int_{\Gamma_2} \mu(x,y,z)ds + \int_{\Gamma_3} \mu(x,y,z)ds = \int_{\Gamma_3} \mu(x,y,z)ds$$

D'après l'équation paramétrique de Γ_3, on a

$$m = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(\theta)\cos(\theta) + 2\cos^3(\theta)\sin(\theta))d\theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \left[-\frac{\cos^2(\theta)}{2} - \frac{\cos^4(\theta)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

(d) Donner une paramétrisation de Σ en coordonnées cylindriques.

Corrigé :

$$\Sigma = \begin{cases} x = \sqrt{1-\frac{z^2}{3}}\cos(\theta) \\ y = \sqrt{1-\frac{z^2}{3}}\sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \qquad 0 \leq z \leq \sqrt{3}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}.$$

(e) Exprimer l'intégrale surfacique $\int\int_\Sigma f d\sigma$ à l'aide d'une intégrale double en utilisant cette paramétrisation.

Corrigé : En utilisant l'équation paramétrique, on peut vérifier que
$\vec{T}_\theta \wedge \vec{T}_z = (\sqrt{1-\frac{z^2}{3}}\cos(\theta), \sqrt{1-\frac{z^2}{3}}\sin(\theta), \frac{z}{3})$. Cela montre que

$$\begin{aligned} \int\int_\Sigma f d\sigma &= \int\int_\Delta f(\sqrt{1-\frac{z^2}{3}}\cos(\theta), \sqrt{1-\frac{z^2}{3}}\sin(\theta), z)\|\vec{T}_\theta \wedge \vec{T}_z\| d\theta dz \\ &= \int\int_\Delta f(\sqrt{1-\frac{z^2}{3}}\cos(\theta), \sqrt{1-\frac{z^2}{3}}\sin(\theta), z)\sqrt{1-\frac{2z^2}{9}} d\theta dz \end{aligned}$$

où $\Delta = \{(z,\theta) \ : \ 0 \leq z \leq \sqrt{3}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$.

(f) On considère le champ de vecteurs $\vec{V} = (xz, yz+x, 0)$. On oriente Σ par la normale unitaire dont la troisième composante est positive. Calculer le flux de rot($\vec{V}$) à travers Σ.

Corrigé : Σ est orientée suivant la normale $\vec{T}_\theta \wedge \vec{T}_z = (\sqrt{1-\frac{z^2}{3}}\cos(\theta), \sqrt{1-\frac{z^2}{3}}\sin(\theta), \frac{z}{3})$, donc

$$\phi_\Sigma(\text{rot}(\vec{V})) = \int\int_\Delta \text{rot}(\vec{V}).(\vec{T}_\theta \wedge \vec{T}_z) d\theta dz.$$

Puisque rot($\vec{V}$) $= (-y, x, 1)$, on déduit que

$$\phi_\Sigma(\text{rot}(\vec{V})) = \frac{1}{3}\int\int_\Delta z d\theta dz = \frac{\pi}{12}\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{8}.$$

(g) Retrouver le flux de rot($\vec{V}$) à travers Σ en utilisant un théorème intégral et préciser le théorème utilisé.

Corrigé : D'après le théorème de Stokes-Ampère on sait que

$$\phi_\Sigma(\text{rot}(\vec{V})) = \mathcal{T}_\Gamma(\vec{V}) = \int_\Gamma xz \ dx + (yz+x) \ dy.$$

D'après l'équation paramétrique de Γ_1, Γ_2 et Γ_3, on a

$$\mathcal{T}_{\Gamma_1}(\vec{V}) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(\theta)\ d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

$$\mathcal{T}_{\Gamma_2}(\vec{V}) = -\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(\theta)\sin^2(\theta)\ d\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}\left[\sin^3(\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\mathcal{T}_{\Gamma_3}(\vec{V}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sqrt{3}\cos(\theta)\sin^2(\theta)\ d\theta - \frac{1}{2}\cos(\theta)\sin(\theta)\ d\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}\left[\sin^3(\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\left[\sin^2(\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{4}.$$

Ce qui montre que $\mathcal{T}_{\Gamma}(\vec{V}) = \frac{\pi}{8}$.

2. On considère le volume $\mathcal{V}$ défini par

$$\mathcal{V} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tel que} \quad x^2 + y^2 + \frac{z^2}{3} \leq 1,\ 0 \leq z,\ 0 \leq y \leq x\right\}$$

et on note (S) la surface qui limite le volume $\mathcal{V}$.

(a) Définir et paramétrer chaque partie de la surface (S).

Corrigé : On a $(S) = (S_1) \cup (S_2) \cup (S_3) \cup \Sigma$, où

$$S_1 = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 0 \end{cases} \quad (x, y) \in D_1, \quad S_2 = \begin{cases} x = x \\ y = x \\ z = z \end{cases} \quad (x, y) \in D_2,$$

$$S_3 = \begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = z \end{cases} \quad (x, z) \in D_3,$$

avec

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

$$D_2 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad 2x^2 + \frac{z^2}{3} \leq 1, x \geq 0, z \geq 0\}$$

$$D_3 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad x^2 + \frac{z^2}{3} \leq 1, x \geq 0, z \geq 0\}.$$

(b) On suppose que (S) est orientée par la normale extérieure. Calculer le flux de champ de vecteurs $\vec{V} = (0, 0, z)$ à travers (S).

Corrigé : Puisque (S) est orientée vers la normale extérieure, donc (S_1) est orientée vers la normale $(0, 0, -1)$, (S_2) est orientée vers la normale $(-1, 1, 0)$, (S_3) est orientée vers la normale $(0, -1, 0)$ et Σ est orientée vers la normale $\vec{T_\theta} \wedge \vec{T_z} = (\sqrt{1 - \frac{z^2}{3}}\cos(\theta), \sqrt{1 - \frac{z^2}{3}}\sin(\theta), \frac{z}{3})$. Cela implique que

$$\phi_{S_1}(\vec{V}) = \int\int_{D_1} -z dx dy = 0,$$

$$\phi_{S_2}(\vec{V}) = \int\int_{D_2} 0 dx dz = 0,$$

$$\phi_{S_3}(\vec{V}) = \int\int_{D_3} 0 dx dz = 0,$$

$$\phi_{\Sigma}(\vec{V}) = \int\int_{\Delta} \frac{z^2}{3} d\theta dz = \frac{\pi}{4}\left[\frac{z^3}{9}\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{12}.$$

Alors $\phi_S(\vec{V}) = \frac{\pi\sqrt{3}}{12}$.

(c) En déduire, en utilisant un théorème intégral, le volume de $\mathcal{V}$.

Corrigé : D'après le théorème de de Gauss-Ostrogradski, on sait que

$$\phi_S(\vec{V}) = \int\int\int_{\mathcal{V}} \text{div}(\vec{V}) dxdydz = \int\int\int_{\mathcal{V}} dxdydz = V(\mathcal{V}).$$

On utilise la question précédente, on obtient

$$\phi_S(\vec{V}) = V(\mathcal{V}) = \frac{\pi\sqrt{3}}{12}.$$

Rappel

1. Masse d'une courbe : Soit Γ une courbe d'équation $\{x(t), y(t), z(t)\}$, $t_0 \leq t \leq t_1$ de masse curviligne $\mu(x, y, z)$, alors la masse totale de Γ est donnée par formule suivante :

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \mu(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt.$$

2. Formule de Green-Riemann : Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ de bord Γ. Si Γ est orienté dans le sens trigonométrique, alors

$$\int_\Gamma P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\int_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy.$$

3. Formule de Stokes-Ampère : Soit Σ une surface de bord Γ. Si Γ est orienté dans le même sens que Σ, alors pour tout champ de vecteurs $\vec{V} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ on a

$$\int_\Gamma P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int\int_\Sigma \text{rot}(\vec{V}).\vec{n}\ d\sigma.$$

4. Formule de Gauss-Ostrogradski : Soit $\mathcal{V}$ un volume de $\mathbb{R}^3$ limité par une surface (S). Si (S) est orientée vers la normale extérieure, alors

$$\int\int_S \vec{V}.\vec{n}\ d\sigma = \int\int\int_{\mathcal{V}} \text{div}(\vec{V})dxdydz.$$