Université de Technologie de Compiègne

MT22 : Juin 2013 - Examen final

Exercice 1. (4 points) On considère le volume $\mathcal{V}$ défini par

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tel que} \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ x^2 + y^2 \geq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}.$$

1. Représenter $\mathcal{V}$ graphiquement. **(0.5 pt)**
2. Soit $I = \int\int\int_{\mathcal{V}} f(x, y, z)dxdydz$.
   (a) Soit D la projection de $\mathcal{V}$ sur le plan (xOy). Représenter D graphiquement. **(0.5 pt)**

   Corrigé : D est le domaine suivant :

   $$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

   (b) En effectuant un changement de variables, en coordonnées polaires, exprimer à l'aide d'intégrales simples l'intégrale double $J = \int\int_D g(x, y)dxdy$. **(1 pt)**

   Corrigé : On pose $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$. On peut vérifier que $(x, y) \in D$ ssi $(x, y) \in \Delta$ où $\Delta = \{(r, \theta)\ :\ 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ et deplus on a $dxdy = rdrd\theta$, alors

   $$J = \int\int_D g(x, y)dxdy = \int\int_\Delta g(r\cos(\theta), r\sin(\theta))rdrd\theta. = \int_1^2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(r\cos(\theta), r\sin(\theta))rd\theta\right] dr.$$

   (c) Exprimer, par la méthode en bâtons, l'intégrale I à l'aide d'intégrales simples. **(0.5 pt)**

   Corrigé : D'après la question précédente, on a

   $$I = \int\int_D \left[\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x, y, z)dz\right] dxdy = \int_1^2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{\sqrt{4-r^2}} f(r\cos(\theta), \sin(\theta), z)dz\right] rd\theta\right] dr.$$

   (d) Calculer I, lorsque $f(x, y, z) = xyz$. **(1.5 pt)**

   Corrigé : On intègre par rapport à z, puis par rapport à θ et finalement par rapport à r, on obtient

   $$I = \frac{1}{2}\int\int_\Delta r^3(4 - r^2)\cos(\theta)\sin(\theta)drd\theta = \frac{1}{4}\int_1^2 4r^3 - r^5 dr = \frac{1}{4}\left[r^4 - \frac{r^6}{6}\right]_1^2 = \frac{9}{8}.$$

CHANGER DE FEUILLE !

Exercice 2. (5 points)

1. On considère la courbe $\mathcal{C}_1$ de $\mathbb{R}^2$, définie par l'équation paramétrique suivante :

   $$\mathcal{C}_1 : \begin{cases} x(t) = (t - \sin(t)) \\ y(t) = (1 - \cos(t)) \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

   (a) Montrer que les points $O = (0, 0)$, $A = (\pi, 2)$ et $B = (2\pi, 0)$ appartiennent à la courbe $\mathcal{C}_1$ Représenter l'allure de la courbe $\mathcal{C}_1$. **(0.5 pt)**

   Corrigé : On peut vérifier que $O = (x(0), y(0))$, $A = (x(\pi), y(\pi))$ et $C = (x(2\pi), y(2\pi))$.

(b) Calculer la longueur de la courbe $\mathcal{C}_1$. **(1 pt)**

Corrigé : On a

$$l(\mathcal{C}_1) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos(t))^2 + (sin(t))^2}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos(t))}dt.$$

On utilise la formule suivante $2\sin^2(\frac{t}{2}) = 1 - \cos(t)$, on obtient que

$$l(\mathcal{C}_1) = 2\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 4\left[-\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = 8.$$

2. On considère la courbe $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ avec

$$\mathcal{C}_2 : \{y = 0,\ 0 \leq x \leq 2\pi\}$$

et on note D le domaine de $\mathbb{R}^2$ limité par la courbe $\mathcal{C}$. On suppose que $\mathcal{C}$ est orientée dans le sens trigonométrique.

(a) Représenter D graphiquement (on pourra le faire sur la même figure que précédement). **(0.5 pt)**

(b) Calculer la circulation du champ de vecteurs $\vec{V} = (-y, 0)$ le long de la courbe $\mathcal{C}$. **(1.5 pt)**

Corrigé : On a

$$\mathcal{T}_{\mathcal{C}}(\vec{V}) = \int_{\mathcal{C}_1} -ydx + \int_{\mathcal{C}_2} -ydx = \int_0^{2\pi} (1-\cos(t))^2 dt = \int_0^{2\pi} 1 + \cos^2(t) - 2\cos(t)dt.$$

On utilise la formule $\cos^2(t) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2t)}{2}$, on obtient que

$$\mathcal{T}_{\mathcal{C}}(\vec{V}) = \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} + \frac{\cos(2t)}{2} - 2\cos(t) = \left[\frac{3}{2}t + \frac{\sin(2t)}{4} - 2\sin(t)\right]_0^{2\pi} = 3\pi.$$

(c) En déduire, à l'aide du théorème de Green-Riemann, l'aire de D. **(0.5 pt)**

Corrigé : Puisque $\mathcal{C}$ est orientée dans le sens trigonométrique, alors d'après le théorème de Green-Riemann, on sait que

$$\mathcal{T}_{\mathcal{C}}(\vec{V}) = \int_{\mathcal{C}} -ydx = \int\int_D dxdy = \mathcal{A}(D) = 3\pi.$$

(d) En déduire la circulation du champ de vecteurs $\vec{U} = (y(4x^3 - 1), x^4)$ le long de la courbe $\mathcal{C}_1$. **(1 pt)**

Corrigé : D'après le théorème de Green-Riemann, on sait que

$$\mathcal{T}_{\mathcal{C}}(\vec{U}) = \int_{\mathcal{C}} y(4x^3-1)dx + x^4dy = \int\int_D dxdy = \mathcal{A}(D) = 3\pi.$$

De plus, on a

$$\mathcal{T}_{\mathcal{C}_2}(\vec{U}) = \int_{\mathcal{C}_2} y(4x^3-1)dx + x^4dy = 0.$$

Donc $\mathcal{T}_{\mathcal{C}_1}(\vec{U}) = \mathcal{T}_{\mathcal{C}}(\vec{U}) - \mathcal{T}_{\mathcal{C}_2}(\vec{U}) = 3\pi$.

CHANGER DE FEUILLE !

Exercice 3. (11 points)

1. On considère la surface Σ définie par

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tel que} \quad x^2+y^2=(z+1)^2,\ 0 \le z \le 1,\ y \ge 0\right\}$$

et on appelle Γ le bord de Σ.

(a) Représenter Σ et Γ graphiquement. **(0.5 pt)**

(b) Donner une paramétrisation de Σ en coordonnées cylindriques. **(0.5 pt)**

Corrigé :

$$\Sigma = \left\{ \begin{array}{l} x=(z+1)\cos(\theta) \\ y=(z+1)\sin(\theta) \\ z=z \end{array} \right. \qquad 0 \le z \le 1, 0 \le \theta \le \pi.$$

(c) Exprimer l'intégrale surfacique $\displaystyle\int\int_\Sigma f d\sigma$ à l'aide d'une intégrale double en utilisant cette paramétrisation. **(1 pt)**

Corrigé : En utilisant l'équation paramétrique, on peut vérifier que $\vec{T}_\theta \wedge \vec{T}_z = ((z+1)\cos(\theta),(z+1)\sin(\theta),-(z+1))$. Cela montre que

$$\begin{aligned}\int\int_\Sigma f d\sigma &= \int\int_\Delta f((z+1)\cos(\theta),(z+1)\sin(\theta),z)\|\vec{T}_\theta \wedge \vec{T}_z\| d\theta dz \\ &= \sqrt{2}\int\int_\Delta f((z+1)\cos(\theta),(z+1)\sin(\theta),z)(z+1) d\theta dz\end{aligned}$$

où $\Delta = \{(z,\theta)\ :\ 0 \le z \le 1, 0 \le \theta \le \pi\}$.

(d) En déduire l'aire de Σ. **(1 pt)**

Corrigé : On sait que

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \int\int_\Sigma f d\sigma = \sqrt{2}\pi \left[\frac{(z+1)^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}\pi.$$

(e) On considère le champ de vecteurs $\vec{V} = (2y(z+1), 0, xy)$. On oriente Σ par la normale unitaire dont la deuxième composante est positive. Calculer le flux de $\text{rot}(\vec{V})$ à travers Σ. **(1 pt)**

Corrigé : Σ est orintée suivant la normale $\vec{T}_\theta \wedge \vec{T}_z = ((z+1)\cos(\theta),(z+1)\sin(\theta),-(z+1))$, donc

$$\phi_\Sigma(\text{rot}(\vec{V})) = \int\int_\Delta \text{rot}(\vec{V}).(\vec{T}_\theta \wedge \vec{T}_z) d\theta dz.$$

Puisque $\text{rot}(\vec{V}) = (x, y, -2(z+1))$, on déduit que

$$\phi_\Sigma(\text{rot}(\vec{V})) = \int\int_\Delta 3(z+1)^2 d\theta dz = \pi\left[(z+1)^3\right]_0^1 = 7\pi.$$

(f) Donner une paramétrisation de la courbe Γ. **(1 pt)**

Corrigé : On peut voir que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, avec

$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{array}{l} x=\cos(\theta) \\ y=\sin(\theta) \\ z=0 \end{array} \right. \quad \theta = 0 \to \pi, \quad \Gamma_2 = \left\{ \begin{array}{l} x=-(z+1) \\ y=0 \\ z=z \end{array} \right. \quad z = 0 \to 1,$$

$$\Gamma_3 = \left\{ \begin{array}{l} x=2\cos(\theta) \\ y=2\sin(\theta) \\ z=1 \end{array} \right. \quad \theta = \pi \to 0, \quad \Gamma_4 = \left\{ \begin{array}{l} x=(z+1) \\ y=0 \\ z=z \end{array} \right. \quad z = 1 \to 0.$$

(g) Retrouver le flux de rot($\vec{V}$) à travers Σ en utilisant un théorème intégral et préciser le théorème utilisé. Γ. **(1.5 pt)**

Corrigé : D'après le théorème de Stokes-Ampère on sait que

$$\phi_\Sigma(\text{rot}(\vec{V})) = \mathcal{T}_\Gamma(\vec{V}) = \int_\Gamma 2y(z+1)\ dx + xy\ dz.$$

En utilisant l'équation paramétrique de Γ_2 et Γ_4, on obtient $\mathcal{T}_{\Gamma_2}(\vec{V}) = \mathcal{T}_{\Gamma_4}(\vec{V}) = 0$. De plus d'après l'équation paramétrique de Γ_1 et Γ_3, on a

$$\mathcal{T}_{\Gamma_1}(\vec{V}) = \int_0^\pi -2\sin^2(\theta)\ d\theta = -\left[\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^\pi = -\pi$$

$$\mathcal{T}_{\Gamma_3}(\vec{V}) = \int_\pi^0 -16\sin^2(\theta)\ d\theta = 8\left[\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^\pi = 8\pi.$$

Ce qui montre que $\mathcal{T}_\Gamma(\vec{V}) = -\pi + 0 + 8\pi + 0 = 7\pi$.

2. On considère le volume $\mathcal{V}$ défini par

$$\mathcal{V} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tel que} \quad x^2 + y^2 \leq (z+1)^2,\ 0 \leq z \leq 1,\ y \geq 0\right\}$$

et on appelle (S) le bord de $\mathcal{V}$.

(a) Définir et paramétrer chaque partie de la surface (S) **(1.5 pt)**.

Corrigé : On a $(S) = (S_1) \cup (S_2) \cup (S_3) \cup \Sigma$, où

$$S_1 = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 0 \end{cases} \quad (x,y) \in D_1, \quad S_2 = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 1 \end{cases} \quad (x,y) \in D_2,$$

$$S_3 = \begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = z \end{cases} \quad (x,z) \in D_3,$$

avec

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$$
$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 0\}$$
$$D_3 = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad -(z+1) \leq x \leq (z+1),\ 0 \leq z \leq 1\}.$$

(b) On suppose que (S) est orientée par la normale extérieure. Calculer le flux de champ de vecteurs $\vec{V} = (x, -y, z)$ à travers (S). **(1.5 pt)**

Corrigé : Puisque (S) est orientée vers la normale extérieure, donc (S_1) est orientée vers la normale $(0,0,-1)$, (S_2) est orientée vers la normale $(0,0,1)$, (S_3) est orientée vers la normale $(0,-1,0)$ et Σ est orintée vers la normale $\vec{T}_\theta \wedge \vec{T}_z = ((z+1)\cos(\theta), (z+1)\sin(\theta), -(z+1))$. Cela implique que

$$\phi_{S_1}(\vec{V}) = \int\int_{D_1} -z dx dy = 0,$$

$$\phi_{S_2}(\vec{V}) = \int\int_{D_2} z dx dy = \int\int_{D_2} dx dy = \mathcal{A}(D_2) = 2\pi,$$

$$\phi_{S_3}(\vec{V}) = \int\int_{D_3} y dx dy = 0,$$

$$\phi_\Sigma(\vec{V}) = \int\int_\Delta (z+1)^2(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) - z(z+1)d\theta dz \quad = \int\int_\Delta (z+1)^2\cos(2\theta) - z^2 - zd\theta dz$$
$$= \pi\left[-\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{5\pi}{6}.$$

Alors $\phi_S(\vec{V}) = 2\pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$.

(c) Retrouver le résultat précédent en utilisant un théorème intégral et préciser le théorème utilisé. **(1 pt)**

Corrigé : D'après le théorème de de Gauss-Ostrogradski, on sait que

$$\phi_S(\vec{V}) = \int\int\int_\mathcal{V} \text{div}(\vec{V})dxdydz = \int\int\int_\mathcal{V} dxdydz.$$

En utilisant la méthode de tranches, on déduit que

$$\phi_S(\vec{V}) = \int_0^1 \left[\int\int_{D_z} dxdy\right] dz = \int_0^1 \mathcal{A}(D_z)dz$$

où $D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad x^2 + y^2 \leq (z+1)^2,\ y \geq 0\}$. Alors

$$\phi_S(\vec{V}) = \frac{1}{2}\int_0^1 \pi(z+1)^2dz = \frac{\pi}{2}\left[\frac{(z+1)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{7\pi}{6}.$$

(d) En déduire le volume de $\mathcal{V}$. **(0.5 pt)**

Corrigé : D'après la question précédente, on a

$$\phi_S(\vec{V}) = V(\mathcal{V}) = \frac{7\pi}{6}.$$