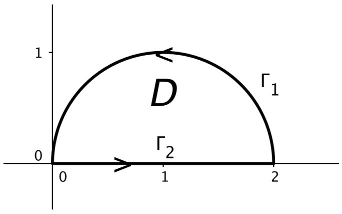
MT22 - Automne 2016 - Final
Durée : 2 heures. Aucun document, calculatrice ou smartphone ne sont autorisés.
Rendez une copie par exercice. Barème : (Ex.1,Ex.2,Ex.3)=(8,8,4)

Exercice 1. (changez de copie)

On considère le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 - 2x + y^2 \leq 0,\ y \geq 0\}$.

1. (a) Montrer que que D est délimité par une courbe fermée $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ où Γ_2 appartient à l'axe Ox puis faire une figure.



Corrigé : *On a* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ *c'est donc un demi-disque de rayon 1 et de centre* $(1,0)$*. D'où* $\Gamma_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x-1)^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ *et* $\Gamma_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 2, y = 0\}$.

(b) Donner pour chacune des courbes Γ_1 et Γ_2 un paramétrage les orientant dans le sens direct.

Corrigé : *On a* $\Gamma_1 = \operatorname{Im}\gamma_1$ *et* $\Gamma_2 = \operatorname{Im}\gamma_2$ *avec*

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [0,\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ \theta &\longmapsto (1+\cos\theta, \sin\theta), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \gamma_2 : [0,2] &\longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ x &\longmapsto (x,0). \end{aligned}$$

2. Calculer $I = \iint_D y\,dx\,dy$.

Corrigé :

$$I = \int_0^\pi \int_0^1 r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta = \frac{2}{3}$$

3. On considère le champ de vecteurs $\vec{V}(x,y) = (\frac{y^2}{2} - 1, y(\alpha x - 1))$ où α est un réel donné.

(a) Calculer $\mathscr{T}_{\Gamma_1}(\vec{V}) = \int_{\Gamma_1} \vec{V}.\vec{dl}$

Corrigé :

$$\begin{aligned} \mathscr{T}_{\Gamma_1}(\vec{V}) &= \int_0^\pi \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin^2\theta - 1 \\ \sin\theta(\alpha(1+\cos\theta) - 1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} d\theta \\ &= \int_0^\pi (\tfrac{1}{2}\sin\theta + \tfrac{1}{2}(\alpha - 1)\sin 2\theta + (\tfrac{1}{2} + \alpha)\sin\theta\cos^2\theta) d\theta \\ &= 1 + 0 - (\tfrac{1}{2} + \alpha)[\tfrac{1}{3}\cos^3\theta]_0^\pi = \frac{4 + 2\alpha}{3} \end{aligned}$$

(b) Montrer que lorsque $\alpha = 1$, il est possible de retrouver $\mathscr{T}_{\Gamma_1}(\vec{V})$ sans utiliser la question précédente ni calculer d'intégrale curviligne.

Corrigé : *Pour* $\alpha = 1$ *la formule précédente donne* $\mathscr{T}_{\Gamma_1}(\vec{V}) = 2$*. Mais dans ce cas* $\vec{V}$ *dérive d'un potentiel car on a* $\vec{V} = (P(x,y), Q(x,y)) = (\frac{y^2}{2} - 1, y(x-1))$ *et*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y - y = 0.$$

On retrouve facilement $\vec{V} = \vec{\nabla} f$ *avec* $f(x,y) = (x-1)y^2/2 - x$*. D'où* $\mathscr{T}_{\Gamma_1}(\vec{V}) = f(0,0) - f(2,0) = 2$

(c) On prend $\alpha = 2$. A l'aide d'un théorème intégral et des questions précédentes donnez la valeur de $\mathscr{T}_{\Gamma_2}(\vec{V})$ sans calculer d'intégrale curviligne.

Corrigé : *Le théorème de Green-Riemann permet d'écrire que*

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \mathscr{T}_\Gamma(\vec{V}) = \mathscr{T}_{\Gamma_1}(\vec{V}) + \mathscr{T}_{\Gamma_2}(\vec{V}),$$

qui donne pour $\alpha = 2$, et en utilisant les résultats des questions 2) et 3)

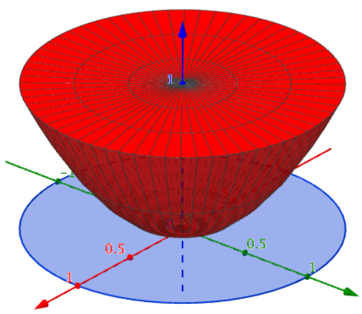
$$\iint_D y\,dxdy = \frac{2}{3} = \frac{8}{3} + \mathscr{T}_{\Gamma_2}(\vec{V}),$$

soit $\mathscr{T}_{\Gamma_2}(\vec{V}) = -\frac{1}{2}$.

Exercice 2. (changez de copie)

On considère le sous-espace défini par $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ z-1 \le 0,\ x^2+y^2-z \le 0\right\}$ (on supposera que la masse volumique de Ω est égale à 1).

1. Représenter Ω (faire une figure) puis calculer son volume $\mathscr{V}(\Omega)$.



Corrigé : *Si on note $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \le 1\}$ alors $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (x,y) \in D,\ x^2+y^2 \le z \le 1\right\}$ et donc, avec la méthode des bâtonnets,*

$$\begin{aligned} \mathscr{V}(\Omega) &= \iiint_\Omega dxdydz = \iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^1 dz \right) dxdy = \iint_D (1-(x^2+y^2))dxdydz \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r^2) r dr d\theta = 2\pi \int_0^1 (r-r^3)\,dr = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

en utilisant un changement de variables en coordonnées polaires pour le calcul de l'intégrale double.

2. Calculer les coordonnées x_G, y_G, z_G du centre de gravité de Ω.

Corrigé : *Pour des raisons évidentes de symétrie $\iint_\Omega x\,dxdy = \iint_\Omega y\,dxdy = 0$ d'où $x_G = y_G = 0$. Sinon*

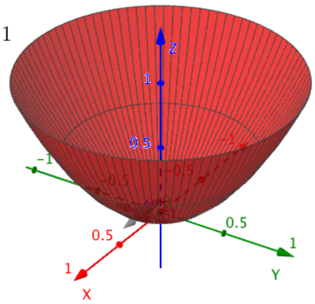
$$\iiint_\Omega z\,dxdydz = \iint_D \int_{x^2+y^2}^1 z\,dxdydz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\int_{r^2}^1 z dz \right) r dr d\theta = \pi \int_0^1 (r-r^5)\,dr = \frac{\pi}{3}$$

d'où $z_G = \dfrac{\iiint_\Omega z\,dxdydz}{\mathscr{V}(\Omega)} = \dfrac{2}{3}$.

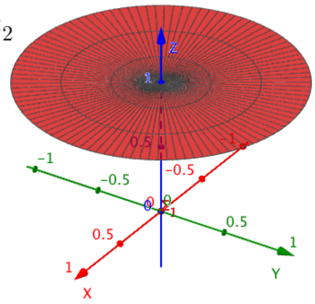
3. Soit Σ la surface fermée délimitant Ω (on considérera que Σ est orientée par la normale extérieure).

   (a) Montrer que $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ où Σ_1 est une surface gauche et Σ_2 une surface plane, représenter ces surfaces (faire une figure), puis donner pour chacune d'elles un paramétrage.

Σ_1



Σ_2



Corrigé : *Les deux surfaces sont aisément paramétrées via une équation cartésienne explicite de la forme $z = \phi(x,y)$, $(x,y) \in D$:*

$$\Sigma_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (x,y) \in D,\ z = x^2+y^2\}, \quad \Sigma_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (x,y) \in D,\ z = 1\}$$

(b) Calculer $\mathscr{A}(\Sigma)$ l'aire de Σ.

Corrigé : *On a trivialement $\mathscr{A}(\Sigma_2) = \pi$ (disque de rayon 1) et en utilisant l'équation explicite de Σ_1, $\vec{N}(x,y) = (-2x,-2y,1)$ et donc*

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\Sigma_1) = \iint_{\Sigma_2} dS = \iint_D \sqrt{1+4(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}drd\theta \\ = 2\pi[\tfrac{1}{12}(1+4r^2)^{3/2}]_0^1 = \tfrac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)\end{aligned}$$

d'où $\mathscr{A}(\Sigma) = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)+\pi = \frac{5\pi}{6}(\sqrt{5}+1)$.

4. Soit le champ de vecteurs $\vec{V}(x,y,z) = (x,0,\frac{z^2}{2})$.

(a) Calculer le flux de $\vec{V}$ à travers Σ_2

Corrigé : *Sur Σ_2 la normale unitaire extérieure est $\vec{n_2} = (0,0,1)$ et donc $\vec{V}.\vec{n_2} = \frac{z^2}{2} = \frac{1}{2}$ d'où*

$$\iint_{\Sigma_2} \vec{V}.\vec{n_2}dS = \frac{1}{2}\iint_{\Sigma_2} dS = \frac{1}{2}\mathscr{A}(\Sigma_2) = \frac{\pi}{2}$$

(b) A l'aide d'un théorème intégral et des questions précédentes donnez la valeur du flux de $\vec{V}$ à travers Σ_1 sans calculer d'intégrale de surface.

Corrigé : *Le théorème de Gauss-Ostrogradski nous permet d'écrire que*

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_1}\vec{V}.\vec{n_1}dS + \iint_{\Sigma_2}\vec{V}.\vec{n_2}dS = \iint_{\Sigma}\vec{V}.\vec{n}\,dS = \iiint_{\Omega}\operatorname{div}\vec{V}dxdydz = \iiint_{\Omega}(1+z)dxdydz \\ = \mathscr{V}(\Omega) + \iiint_{\Omega} zdxdydz = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6},\end{aligned}$$

d'où

$$\iint_{\Sigma_1}\vec{V}.\vec{n_1}dS = \frac{5\pi}{6} - \iint_{\Sigma_2}\vec{V}.\vec{n_2}dS = \frac{\pi}{3}$$

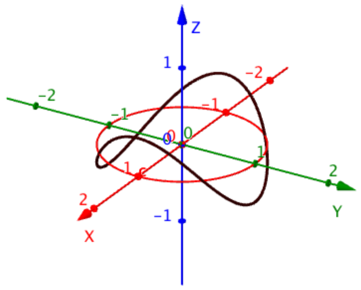
Exercice 3. (changez de copie)

Soit $\vec{V}$ le champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ défini par $\vec{V}(x,y,z) = (x,-y,0)$ et la surface Σ définie par

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2-y^2-2z = 0,\ x^2+y^2-1 \leq 0\},$$

orientée par le champ de normales $\vec{n}$ faisant un angle aigu avec l'axe Oz.

1. Représenter Γ et sa projection sur le plan Oxy (faire une figure).



Corrigé : *Σ admet une équation cartésienne explicite $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (x,y) \in D,\ z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\}$ où D est le disque unité. Le bord de Σ se projette donc sur la frontière de D, c'est à dire le cercle unité et Γ le bord de Σ est l'ensemble des points (x,y,z) où $x^2 + y^2 = 1$ et $z = x^2 - y^2$.*

2. Donner un paramétrage de Γ cohérent avec l'orientation de Σ (règle du tire-bouchon).

Corrigé : *On utilise la remarque faite précédemment sur la projection de Γ pour en déduire son paramétrage*

$$\begin{aligned}\gamma : [0,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3\\ \theta &\longmapsto (\cos\theta, \sin\theta, \tfrac{1}{2}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)) = (\cos\theta, \sin\theta, \tfrac{1}{2}\cos 2\theta)\end{aligned}$$

3. Montrer que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel vecteur $\vec{A} = (y, x, f(x,y))$, où on déterminera f.

Corrigé : *On a* $\operatorname{div}\vec{V} = 0$ *et*

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \vec{V} \iff f(x,y) = xy$$

4. En déduire, à l'aide d'un théorème intégral, la valeur de $\iint_\Sigma \vec{V}.\vec{n}\, dS$ sans calculer d'intégrale de surface.

Corrigé : *D'après le théorème de Stokes-Ampère*

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma \vec{V}.\vec{n}\, dS = \iint_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}.\vec{n}\, dS &= \int_\Gamma \vec{A}.\vec{dl}\\ &= \int_0^{2\pi} (\sin\theta, \cos\theta, \sin\theta\cos\theta).(-\sin\theta, \cos\theta, -\sin 2\theta)d\theta\\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2\theta - \sin^2\theta - \tfrac{1}{2}\sin^2 2\theta)d\theta = -\tfrac{1}{4}\int_0^{2\pi}(1 - \cos 4\theta)d\theta = -\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Formulaire

Mise en garde : d'une part, certains résultats nécessaires à la résolution des exercices ne sont pas rappelés dans ce formulaire et d'autre part, certains peuvent être inutiles en fonction de votre manière de répondre aux questions posées.

1. Circulation d'un champ de vecteurs $\vec{V}$ de $\mathbb{R}^n$ sur une courbe Γ paramétrée par $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ $(n = 2,3)$

$$\mathscr{T}_\Gamma(\vec{V}) = \int_\Gamma \vec{V}.\vec{dl} = \int_a^b \vec{V}(\gamma(t)).\gamma'(t)\,dt$$

2. Pour un domaine Ω de $\mathbb{R}^3$ de masse volumique $\rho(x,y,z)$
   (a) Masse de Ω : $M(\Omega) = \iiint_\Omega \rho(x,y,z)dxdydz$
   (b) Centre de gravité G :

$$x_G = \frac{1}{M(\Omega)}\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)dxdydz,\ y_G = \frac{1}{M(\Omega)}\iiint_\Omega y\rho(x,y,z)dxdydz,\ z_G = \frac{1}{M(\Omega)}\iiint_\Omega z\rho(x,y,z)dxdydz$$

3. Pour une surface définie par une équation cartésienne explicite $z = \phi(x,y)$ pour $(x,y) \in D$:
   (a) Champ de normales : $\vec{N}(x,y) = \left(-\frac{\partial\phi}{\partial x}, -\frac{\partial\phi}{\partial y}, 1\right)$
   (b) Intégrale de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sur Σ : $\iint_\Sigma f\,dS = \iint_D f(x,y,\phi(x,y))\left\|\vec{N}(x,y)\right\|\,dxdy$
   (c) Flux d'un champ de vecteurs $\vec{V}$ à travers Σ : $\iint_\Sigma \vec{V}.\vec{n}\,dS = \iint_D \vec{V}(x,y,\phi(x,y)).\vec{N}(x,y)\,dxdy$
4. Pour une surface définie par un paramétrage général $(x,y,z) = \sigma(u,v)$ pour $(u,v) \in \Delta$:
   (a) Champ de normales : $\vec{N}(u,v) = \dfrac{\partial\sigma}{u} \wedge \dfrac{\partial\sigma}{v}$
   (b) Intégrale de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sur Σ : $\iint_\Sigma f\,dS = \iint_\Delta f(\sigma(u,v))\left\|\vec{N}(u,v)\right\|\,dudv$
   (c) Flux d'un champ de vecteurs $\vec{V}$ à travers Σ : $\iint_\Sigma \vec{V}.\vec{n}\,dS = \iint_\Delta \vec{V}(\sigma(u,v)).\vec{N}(u,v)\,dudv$
5. *Théorème de Green-Riemann* : soit $D \subset \mathbb{R}^2$ délimité par une courbe fermée Γ sans point double et orientée dans le sens direct et $\vec{V}(P(x,y),Q(x,y))$ un champ de vecteurs continûment différentiable. Alors

$$\int_\Gamma \vec{V}.\vec{dl} = \int_\Gamma Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

6. *Théorème de Stokes-Ampère* : soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ délimitée par une courbe fermée Γ orientée de manière cohérente avec Σ, et $\vec{V}(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ continûment différentiable. Alors

$$\int_\Gamma \vec{V}.\vec{dl} = \int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz = \iint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V}.\vec{n}\,dS$$

7. *Théorème de Gauss-Ostrogradski* : soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ délimité par une surface fermée Σ orientée par le champ de normales unitaires extérieures $\vec{n}$ et $\vec{V}$ un champ de vecteurs continûment différentiable. Alors

$$\iiint_\Omega \mathrm{div}\,\vec{V}\,dxdy = \iint_\Sigma \vec{V}.\vec{n}\,dS$$

8. Pour $\vec{V}(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$, $\quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial y}R - \frac{\partial}{\partial z}Q,\ \frac{\partial}{\partial z}P - \frac{\partial}{\partial x}R,\ \frac{\partial}{\partial x}Q - \frac{\partial}{\partial y}P\right)$
9. $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$, $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$, $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
10. $\displaystyle\int \sin(x)\cos^n(x)\,dx = -\frac{\cos^{n+1}(x)}{n+1}$