SY01 Final–A11
Durée : 2h
UNE FEUILLE RECTO-VERSO AUTORISÉE
CALCULATRICE INTERDITE

Le barême tiendra compte de la rédaction. Justifiez clairement vos réponses.

Notons $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires mentionées dans cet énoncé.

Exercice 1. Soient $\alpha > 0$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles i.i.d. (indépendantes et de même loi de probabilité); leur loi commune est la loi exponentielle $\mathcal{E}(\alpha)$.
Considérons la variable aléatoire réelle $M_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$.

1. Déterminer la fonction de répartition de X_1.
2. Montrer que la fonction de répartition de M_n est définie par:

$$F_{M_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0, \\ (1 - \exp(-\alpha x))^n & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

3. La variable aléatoire M_n admet-elle une densité de probabilité ? Si tel est le cas, déterminer cette densité.
4. Considérons la variable aléatoire réelle $Z_n = \alpha M_n - ln(n)$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.
   a. Déterminer la fonction de répartition F_{Z_n} de Z_n.
   b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la limite de $F_{Z_n}(x)$ quand n tend vers $+\infty$ est égale à $G(x) = \exp(-\exp(-x))$.
   c. La fonction G vérifie-t-elle les propriétés d'une fonction de répartition ?
   d. En déduire la convergence en loi de la variable aléatoire Z_n.

Exercice 2. Une variable aléatoire réelle X suit une loi log-normale de paramètres $(\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ si sa densité f_X est définie par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(ln(x) - \mu)^2}{\sigma^2}\right) \mathbb{1}_{x>0},$$

où $\mathbb{1}_{x>0}$ désigne la fonction indicatrice sur $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ et ln est la fonction logarithme népérien.

1. Montrer que la variable aléatoire $Y = ln(X)$ suit une loi Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

2. Considérons le cas particulier de $\sigma^2 = 1$.

   a. Déterminer la fonction génératrice des moments de Y.

   b. Déduire de la question précédente, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$ lorsque X suit la loi log-normale de paramètres $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 = 1$.

   c. Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour déterminer un réel $a > \mathbb{E}(X)$ en fonction de μ tel que, la probabilité que la variable aléatoire X soit supérieure à a, est inférieure à 0.1.

3. Considérons deux variables aléatoires réelles indépendantes Z_1 et Z_2, distribuées selon la même loi; leur loi commune est la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

   a. Montrer que la densité conjointe du vecteur aléatoire $(U,V) = (\frac{Z_1}{Z_2}, Z_2)$ est définie par :

$$f_{(U,V)}(u,v) = \frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{1}{2}v^2(1+u^2))\ |v|\ \mathbb{1}_{(u,v)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*}.$$

   b. En déduire la densité marginale de la variable aléatoire $U = \frac{Z_1}{Z_2}$.

<u>Exercice 3.</u> Soit un vecteur aléatoire $Z = (X,Y)$ de dimension deux et de loi uniforme sur le disque de centre l'origine du repère et de rayon $r > 0$, c'est à dire de densité conjointe:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi r^2} & \text{si} \quad x \in D, \\ 0 & \text{si} \quad x \notin D, \end{cases}$$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$.

1. Montrer que la densité marginale f_X de la variable aléatoire X est définie par:

$$f_X(x) = \frac{2\sqrt{r^2 - x^2}}{\pi r^2}\ \mathbb{1}_{-r\leq x\leq r},$$

   où $\mathbb{1}_{-r\leq x\leq r}$ désigne la fonction indicatrice sur $\{x \in \mathbb{R} : -r \leq x \leq r\}$.

2. Quelle est la densité marginale de Y ?

3. Sans calcul, déterminer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.

4. Les variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

5. Déterminer la covariance de X et Y.

6. Représenter graphiquement l'événement $\{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 : X^2 + Y^2 \leq t\}$ pour un $t \in \mathcal{T}$, où $\mathcal{T}$ est à préciser; en déduire $\mathbb{P}(U \leq t)$, puis la densité de U.

7. Déterminer l'espérance de U.

8. Déduire de la question précédente les variances de X et Y.

9. Déterminer la densité conditionnelle de Y sachant $\{X = x\}$, avec x variant dans l'ensemble $J \subset \mathbb{R}$, qui est à définir.

10. Déterminer l'espérance conditionnelle de $X^2 + Y^2$ sachant X, notée $\mathbb{E}(X^2 + Y^2|X)$.