

SY01 Test–Correction –A11
Durée : 1h –sans document

Exercice 1. (Cours) Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable.

1. Donner la définition d'une probabilité $\mathbb{P}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$.
2. **EXEMPLE DE PROBABILITÉ.** Soit ω_0 un élément de Ω . Soit l'application Q_{ω_0} sur $\mathcal{F}$ définie par :

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad Q_{\omega_0}(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega_0 \in A, \\ 0 & \text{si } \omega_0 \notin A. \end{cases}$$

Montrer que l'application Q_{ω_0} est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Correction.

1. Voir la définition du cours.
2. (i) L'application Q_{ω_0} est définie sur $\mathcal{F}$ et elle est à valeurs dans $[0, 1]$ puisqu'elle ne prend que deux valeurs 0 ou 1.

(ii) Déterminons $Q_{\omega_0}(\Omega)$: par hypothèse ω_0 est un élément de Ω , alors $Q_{\omega_0}(\Omega) = 1$.
(iii) Vérifions la σ -additivité de Q_{ω_0} : soit une famille $(A_i)_{i \in I}$, $I \subset \mathbb{N}$ d'événements deux à deux disjoints,

$$Q_{\omega_0}(\cup_{i \in I} A_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega_0 \in \cup_{i \in I} A_i \text{ c'est à dire } \omega_0 \text{ appartient à exactement un des } A_i \\ 0 & \text{si } \omega_0 \notin \cup_{i \in I} A_i \text{ c'est à dire } \omega_0 \text{ n'appartient à aucun des } A_i. \end{cases} \quad (1)$$

$$\sum_{i \in I} Q_{\omega_0}(A_i) = \text{Nombre des } (A_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ auxquels } \omega_0 \text{ appartient.} \quad (2)$$

Comme les éléments de la famille $(A_i)_{i \in I}$ sont deux à deux incompatibles, l'égalité (2) est égale à 1 si ω_0 appartient à exactement un des A_i et elle est égale à 0 si ω_0 n'appartient à aucun des A_i .

Par conséquent, d'après (1) et (2), la fonction Q_{ω_0} vérifie la propriété de σ -additivité.

Exercice 2. On distribue au hasard p boules distinctes dans n tiroirs distincts ($p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$). Notons pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, T_i l'événement correspondant au “ i -ème tiroir est vide”.

1. Montrer que $\mathbb{P}(T_i) = \frac{(n-1)^p}{n^p}$.

2. Déterminer la probabilité que les k premiers tiroirs soient vides, avec $k \in \{1, \dots, n\}$, c'est à dire déterminer $\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 \cap \dots \cap T_k)$.
3. On s'intéresse à l'événement B "aucun tiroir n'est vide".
 - a) Exprimer l'événement B en fonction des événements $T_1, T_2, \dots, T_n$.
 - b) En déduire la probabilité de B (donner l'expression de cette probabilité sous la forme d'une somme).

Correction.

1. Puisque les boules sont distribuées au hasard et que chacune a la même chance d'atterrir dans l'un ou l'autre des n tiroirs, la probabilité naturelle est ici l'équiprobabilité des éléments de Ω , où Ω est l'ensemble des $n^p = |\Omega| = \text{card}(\Omega)$ applications de l'ensemble des b boules distinctes dans l'ensemble des n tiroirs distincts qui associe à chaque boule un numéro de tiroir.
Le nombre de répartitions excluant un des tiroirs est simplement le nombre de répartitions des p boules dans $(n - 1)$ tiroirs, à savoir : $(n - 1)^p$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(T_i) = \frac{(n - 1)^p}{|\Omega|}$.
2. Cette probabilité consiste à dénombrer le nombre de répartitions de p boules dans $(n - k)$ tiroirs. En procédant comme à la question 1., nous obtenons :

$$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 \cap \dots \cap T_k) = \frac{(n - k)^p}{n^p}.$$

- a)

$$B = \bar{T}_1 \cap \bar{T}_2 \cap \dots \cap \bar{T}_n = \bigcap_{i=1}^n \bar{T}_i.$$

- b) Remarquons que pour $p < n$, $\mathbb{P}(B) = 0$.
Supposons pour la suite de l'exercice que $p \geq n$. Puisque $\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(\cup_{i=1}^n T_i)$, d'après la formule de Poincaré, nous obtenons

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{P}(\cup_{i=1}^n T_i) &= 1 - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(T_{i_1} \cap T_{i_2} \cap \dots \cap T_{i_k}) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{(n - k)^p}{n^p} \\ &= 1 - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} C_n^k \frac{(n - k)^p}{n^p}. \end{aligned}$$

Exercice 3. L'expérience aléatoire $\mathcal{E}$ consiste à lancer trois fois une pièce bien équilibrée.

1. Donner l'espace fondamental Ω associé à $\mathcal{E}$; on considère sur Ω la tribu $\mathcal{F}$ correspondant à l'ensemble de parties de Ω , c'est à dire $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

2. On considère sur $(\Omega, \mathcal{F})$ la probabilité $\mathbb{P}$ définissant l'équiprobabilité sur Ω ; on a ainsi un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

On s'intéresse à l'application X qui à tout élément de Ω associe $X(\omega)$, le nombre de piles obtenus.

- **a)** Montrer que X est une variable aléatoire discrète.
- **b)** Déterminer la loi de probabilité de X .

Correction.

1. $\Omega = \{P, F\}^3$ avec P , respectivement F qui désigne "Pile", respectivement "Face".

- **a)** X est une application qui à tout valeur de ω dans Ω associe une valeur dans $E = \{0, 1, 2, 3\}$ qui est un ensemble fini. Pour conclure que X est une v.a.d. sur $(X, \mathcal{F})$, il reste à montrer que pour tout x dans E , l'ensemble $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$ appartient à $\mathcal{F}$. Pour cela, nous pouvons conclure soit par **I.** ou bien par **II.** :

I. Pour tout x dans E , l'ensemble $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$ étant contenu dans Ω , c'est une partie de Ω qui appartient à $\mathcal{F}$ car $\mathcal{F}$ est l'ensemble des parties de Ω .

II. Remarquons que

$$\mathcal{F} = \{(F, F, F), (F, P, P), (F, P, F), (F, F, P), (P, P, P), (P, P, F), (P, F, P), (P, F, F)\};$$

pour chaque triplet, le i -ème élément correspond à la face obtenue lors du i -ème lancer. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \{\omega \in \Omega : X(\omega) = 0\} &= \{(F, F, F)\} \in \mathcal{F}, \\ \{\omega \in \Omega : X(\omega) = 1\} &= \{(P, F, F), (F, P, F), (F, F, P)\} \in \mathcal{F}, \\ \{\omega \in \Omega : X(\omega) = 2\} &= \{(P, P, F), (F, P, P), (P, F, P)\} \in \mathcal{F}, \\ \{\omega \in \Omega : X(\omega) = 3\} &= \{(P, P, P)\} \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

- **b)** La v.a.d. X est à valeurs dans E et d'après le paragraphe **II.** ci-dessus, étant donnée $\mathbb{P}$ la probabilité équiprobable sur Ω , nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 0\}) &= \frac{1}{8}, \\ \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 1\}) &= \frac{3}{8}, \\ \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 2\}) &= \frac{3}{8}, \\ \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 3\}) &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Exercice 4.

Considérons un pays où il fait beau cinq jours sur les sept jours de la semaine et ce pour toutes les semaines de toutes les années. On suppose que le temps de ce pays est soit "du beau temps" soit "du mauvais temps". Pour ce pays, les prévisions météo sont données par deux stations météo S_1 et S_2 . Les prévisions de S_1 et S_2 sachant le temps qu'il fait, sont indépendantes.

Soient les événements :

- B : “Beau temps”
- M : “Mauvais temps”
- pour $i \in \{1, 2\}$, A_i : “la station S_i annonce du beau temps” et $\bar{A}_i$: “la station S_i annonce du mauvais temps”.

On suppose que $\mathbb{P}(A_1|B) = \mathbb{P}(\bar{A}_1|M) = 0.9$ et $\mathbb{P}(A_2|B) = \mathbb{P}(\bar{A}_2|M) = 0.8$.

1. D’après l’énoncé, les prévisions de S_1 et S_2 sachant le temps qu’il fait, sont indépendantes, c’est à dire $\mathbb{P}(C_1 \cap C_2|B) = \mathbb{P}(C_1|B)\mathbb{P}(C_2|B)$ et $\mathbb{P}(C_1 \cap C_2|M) = \mathbb{P}(C_1|M)\mathbb{P}(C_2|M)$ avec C_i égal à A_i ou bien à $\bar{A}_i$ pour tout i dans $\{1, 2\}$.
Les événements $\bar{A}_1$ et A_2 sont-ils indépendants ?
2. Considérons l’événement D : “la station S_1 annonce du mauvais temps et la station S_2 annonce du beau temps”.
 - **a)** Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(M|D)$.
 - **b)** Lorsque S_1 annonce du mauvais temps et S_2 annonce du beau temps, quelle est la station météo la plus crédible ?

Correction.

1. Pour étudier l’indépendance de $\bar{A}_1$ et de A_2 , il suffit de déterminer $\mathbb{P}(\bar{A}_1 \cap A_2)$, $\mathbb{P}(\bar{A}_1)$, $\mathbb{P}(A_2)$ et de comparer $\mathbb{P}(\bar{A}_1 \cap A_2)$ à $\mathbb{P}(\bar{A}_1)\mathbb{P}(A_2)$. D’après la formule des probabilités totales, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\bar{A}_1 \cap A_2) &= \mathbb{P}(\bar{A}_1 \cap A_2|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(\bar{A}_1 \cap A_2|M)\mathbb{P}(M) \\ &= \mathbb{P}(\bar{A}_1|B)\mathbb{P}(A_2|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(\bar{A}_1|M)\mathbb{P}(A_2|M)\mathbb{P}(M) \\ &= 0.1 * 0.8 * \frac{5}{7} + 0.9 * 0.2 * \frac{2}{7} = \frac{76}{700} \approx 0.1085714\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\bar{A}_1) &= \mathbb{P}(\bar{A}_1|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(\bar{A}_1|M)\mathbb{P}(M) \\ &= 0.1 * \frac{5}{7} + 0.9 * \frac{2}{7} = \frac{23}{70} \approx 0.3285714\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_2) &= \mathbb{P}(A_2|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A_2|M)\mathbb{P}(M) \\ &= 0.8 * \frac{5}{7} + 0.2 * \frac{2}{7} = \frac{(40 + 4)}{70} \approx 0.6285714\end{aligned}$$

$$\text{et } \mathbb{P}(\bar{A}_1) * \mathbb{P}(A_2) = \frac{(44 * 23)}{(70)^2} = \frac{10 * 44 * 23}{10 * (70)^2} \neq \mathbb{P}(\bar{A}_1 \cap A_2) = \frac{76 * 70}{700 * 70}.$$

2. • **a)** D'après la formule de Bayes, nous obtenons,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(M|D) &= \mathbb{P}(M|\bar{A}_1 \cap A_2) \\
 &= \frac{\mathbb{P}(\bar{A}_1|M)\mathbb{P}(A_2|M)\mathbb{P}(M)}{\frac{76}{700}} \\
 &= \frac{0.9 * 0.2 * \frac{2}{7}}{0.1 * 0.8 * \frac{5}{7} + 0.9 * 0.2 * \frac{2}{7}} \\
 &= \frac{36}{76} = \frac{9}{19} < \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

- **b)** Puisque $\mathbb{P}(M|D) < 1/2$ et que $\mathbb{P}(M|D) + \mathbb{P}(B|D) = 1$, il vient que $\mathbb{P}(B|D) > \frac{1}{2}$. Sachant D , la station la plus crédible est par conséquent S_2 .