SY01 - Éléments de probabilités

Chapitre 1 - Fondements des probabilités

Équipe de mathématiques appliquées

UTC

Automne 2010

Chapitre I
Fondements des probabilités

I.1 Introduction

I.1.1 Naïvement

Pour aborder un cours de probabilité, il est normal de vouloir donner un sens au mot clé du cours : **probabilité**. Aussi pouvons-nous commencer par une définition naïve de ce mot.

Définition I.1.1. *Une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1, associé à un événement et indiquant les chances de réalisation de cet événement au cours d'une expérience aléatoire.*

Cette définition laisse entrevoir que pour parler de probabilités il faut trois éléments essentiels :

i- une expérience aléatoire ;

ii- des événements ;

iii- des nombres associés aux événements.

A ces trois éléments nous substituerons respectivement les notions mathématiques d'**univers**, **tribu** et **mesure de probabilité**. Ces trois notions sont liées par des **axiomes**[1] qui permettent de mener des calculs.

Si l'on revient à la définition du mot probabilité on peut s'apercevoir que l'essentiel, c'est-à-dire le sens intrinsèque du mot *probabilité*, est transféré sur le mot *chances*.

Dans ce cours, une probabilité sera toujours un nombre compris entre 0 et 1 non assujetti à notre conception du hasard. Il n'en reste pas moins intéressant de voir comment ont évolué les opinions sur ce sujet d'ordre philosophique. Deux grands courants s'affrontent : les *objectivistes* et les *subjectivistes*.

[1]Propositions primitives que l'on renonce à démontrer et sur lesquelles est basée une science.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.1.2 Conception objectiviste

Exercices :
Exercice A.1.1

Les objectivistes partent du postulat suivant : *la probabilité d'un événement peut être déterminée de manière unique.*
Vision classique. Héritage des jeux de hasard (Chevalier de Méré,...). En général l'ensemble Ω des éventualités (résultat des jeux) est un ensemble fini et des raisons de *symétrie* conduisent à donner la même probabilité à chaque éventualité ; donc 1/2 au jeu de *pile ou face*, 1/6 pour le lancer d'un dé, etc.

Dans ce cas le calcul des probabilités n'est affaire que de dénombrement et si A est un événement, la probabilité $P(A)$ de A est donnée par la célèbre formule :

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

On parle alors d'équiprobabilité. Ainsi, la probabilité d'obtenir un nombre pair en lançant un dé est 3/6=1/2.
Paradoxe de Bertrand. On considère un triangle équilatéral et son cercle circonscrit. On choisit une corde au hasard. Quelle est la probabilité que sa longueur soit supérieure à celle du côté du triangle ?

Solution 1. Pour des raisons de symétrie on fixe un point A sur le cercle puis on choisit l'autre extrémité B de la corde sur le cercle. Comme on peut le voir sur la figure I.1.1 le point B doit être choisi sur l'arc de cercle qui apparaît en gras. La proportion de tels points sur le cercle étant de $1/3$ on conclut que la probabilité cherchée est de 1/3 !

Solution 2. Cette fois-ci on considère que pour déterminer une corde il suffit de choisir son

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

B

A

FIG. I.1.1 – en pointillé une corde d'extrémités A et B

centre A (il la détermine de manière unique). Encore une fois, pour des raisons de symétrie, on considère fixée la direction dans laquelle on choisit le point A. Comme on peut le voir sur la figure I.1.2 les points admissibles sont ceux qui apparaissent sur le segment en gras ; ceux-ci représentent donc la moitié des points du diamètre et on conclut que la probabilité cherchée est de $1/2$!

Les solutions ci-dessus sont exactes ! Et il en existe d'autres... le problème est simplement mal posé dans le sens où l'on ne précise pas ce que l'on entend par "choisir une corde au hasard".

Vision fréquentiste. Elle repose sur la "loi des grands nombres". Une seule expérience ne suffit pas à déterminer la probabilité d'un événement alors on répète l'expérience et on appelle probabilité de l'événement la fréquence limite de sa réalisation. Par exemple, si on note A l'événement "obtenir un 6" en lançant un dé et α_n le nombre de 6 obtenus au cours de n lancés, on a :

$$P(A) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\alpha_n}{n} = \frac{1}{6}.$$

Cette méthode, bien que très intuitive (nous l'utiliserons d'ailleurs dans le cours), est très limi-

A

FIG. I.1.2 – en pointillé une corde de centre A

tée en pratique puisqu'elle nécessite une infinité d'expériences. Nous verrons en fait que la loi des grands nombres n'est qu'une conséquence de la définition des probabilités.

I.1.3 Conception subjectiviste

Postulat : “les probabilité n’existent pas !” de Finetti.

Mesure d’incertitude. La probabilité objective n’existe pas, elle n’est donc pas une grandeur mesurable analogue à la masse d’un corps, elle est seulement une *mesure d’incertitude* pouvant varier avec les circonstances et l’observateur, donc subjective ! La seule exigence est qu’elle satisfasse les axiomes du calcul des probabilités. Pour les subjectivistes, ce sont nos incertitudes sur l’expérience du jet d’une pièce qui nous conduisent à évaluer à 1/2 la probabilité d’obtenir pile ou face.

L’approche Bayésienne. Les Bayésiens vont plus loin ! Voici un bref exemple illustrant leur démarche. Dans l’expérience aléatoire de pile ou face, les Bayésiens considère que la probabilité p d’obtenir pile (donc $1 - p$ d’obtenir face) est elle-même aléatoire. Comme $p \in [0, 1]$ ils donnent une loi dite *a priori* à p et, après avoir réalisé des expériences, en déduisent une loi dite *a posteriori* pour p tenant compte des résultats de l’expérience.

I.2 Ensembles, événements et probabilités

I.2.1 Ensembles

Exercices :
Exercice A.1.2

Dans ce paragraphe nous allons rappeler un certain nombre de notions et résultats élémentaires dont l'utilisation sera très souvent implicite.

Famille des parties. On appelle $\mathcal{P}(E)$ la famille (l'ensemble) des parties de l'ensemble E. On a la caractérisation suivante :

$$A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E \Leftrightarrow (\forall x \in A,\ x \in E).$$

Double inclusion. Soient E et F deux ensembles :

$$E = F \Leftrightarrow (E \subset F \text{ et } F \subset E).$$

Opérations élémentaires. Soit E un ensemble et A et B deux parties de E.

$$\begin{array}{rcll}
\bar{A} & = & \{x \in E | x \notin A\} & \text{complémentaire de } A \text{ dans } E \\
A \cup B & = & \{x \in E | x \in A \text{ ou } x \in B\} & \text{réunion de } A \text{ et } B \\
A \cap B & = & \{x \in E | x \in A \text{ et } x \in B\} & \text{intersection } A \text{ et } B \\
A \backslash B & = & \{x \in E | x \in A \text{ et } x \notin B\} & \text{différence de } A \text{ et } B \\
A \Delta B & = & \{x \in E | x \in A \backslash B \text{ ou } x \in B \backslash A\} & \text{différence symétrique de } A \text{ et } B
\end{array}$$

$\bar{A} = E \backslash A$, le complémentaire de A, est aussi noté A^c ou encore C_E^A pour bien spécifier qu'il s'agit du complémentaire de A **dans** E.

Soit I un ensemble d'indices et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{P}(E)$ alors :

$$\begin{array}{rcll}
\bigcup_{i \in I} A_i & = & \{x \in E | \exists i \in I ; x \in A_i\} & \text{(réunion des } A_i) \\
\bigcap_{i \in I} A_i & = & \{x \in E | \forall i \in I ; x \in A_i\} & \text{(intersection des } A_i)
\end{array}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Partition. Soit I un ensemble d'indices et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{P}(E)$ alors $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de E si les conditions suivantes sont satisfaites :

- les A_i sont deux à deux disjoints ($A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$) ;
- la réunion des A_i est E ($\cup_{i\in I} A_i = E$) ;

Produit cartésien. Le *produit cartésien* de deux ensembles E et F, noté $E \times F$, est défini ainsi :

$$E \times F = \{(x, y) | x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Ensembles finis, dénombrables et non dénombrables. Si E est un ensemble comptant n éléments ($n \in \mathbb{N}$) alors E est dit *fini* (si $n = 0$ alors $E = \emptyset$) ; n est appelé *cardinal* de E et plusieurs notations sont utilisées : $n = \text{Card}(E) = \#E = |E|$. Soient E et F deux ensembles finis :

$$|E| = |F| \Leftrightarrow \text{il existe une bijection } f \text{ de } E \text{ dans } F.$$

Un ensemble est dit *dénombrable* s'il peut être mis en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$. Tout ensemble fini est donc dénombrable, $\mathbb{N}$ est infini dénombrable ($\mathbb{N}$ est en bijection avec lui-même par l'application identité), $\mathbb{Z}$ est infini dénombrable : l'application φ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$ définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} -x/2 & \text{si} \quad x \text{ est pair,} \\ (x+1)/2 & \text{si} \quad x \text{ est impair,} \end{cases}$$

est bijective. En fait on peut montrer que *toute réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est encore dénombrable*. Par exemple $\mathbb{Q}$ est dénombrable, en effet :

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} \mathbb{Z}_i \text{ où } \mathbb{Z}_i = \{\dots, -\frac{2}{i}, -\frac{1}{i}, 0, \frac{1}{i}, \frac{2}{i}, \dots\},$$

et les $\mathbb{Z}_i$ sont dénombrables.
Enfin notons que tous les ensembles ne sont pas dénombrables ! $\mathbb{R}$ en est un exemple, il a la *puissance du continu*. Il en est de même pour tout intervalle $[a, b]$ ($a < b$) de $\mathbb{R}$.

I.2.2 Application

Exercices :
Exercice A.1.3

Soit E et F deux ensembles non vides, une application de E dans F associe à tout élément $x \in E$ un **unique** élément $y = f(x) \in F$ (image de x). Si $y \in F$ tout élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$ est appelé antécédent de y par f.

– Si tout élément de F possède au moins un antécédent par f, l'application f est dite *surjective* :

$$f \text{ surjective } \Leftrightarrow f(E) = F$$

– Si tout élément de F possède au plus un antécédent par f, l'application f est dite *injective* :

$$f \text{ injective } \Leftrightarrow (\forall (x, x') \in E^2, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')).$$

– Si tout élément de F possède un et un seul antécédent par f, l'application f est dite *bijective* :

$$f \text{ bijective } \Leftrightarrow f \text{ injective et surjective}$$

Image et image réciproque. Soit f une application de E dans F, $A \subset E$ et $B \subset F$.

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

est appelé *image de A par f*.

$$f^{-1}(B) = \{x \in E | f(x) \in B\}$$

est appelé *image réciproque de B par f*.

Fonctions indicatrices. Soit E un ensemble et A une partie de E, on appelle *fonction indicatrice de A* (parfois appelée fonction caractéristique), notée 1_A, l'application de E dans $\{0, 1\}$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

définie par :

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A, \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A. \end{cases} ,$$

Si A et B sont deux parties de E on a les propriétés élémentaires suivantes :

$$\begin{array}{rcl} 1_A = 1_B & \Leftrightarrow & A = B, \\ 1_{A\cap B} & = & 1_A 1_B, \\ 1_{\bar{A}} & = & 1_E - 1_A, \\ 1_{A\cup B} & = & 1_A + 1_B - 1_{A\cap B}, \\ 1_{A\cup B} = 1_A + 1_B & \Leftrightarrow & A \cap B = \emptyset. \end{array}$$

I.2.3 Univers et événements

Exercices :
Exercice A.1.4

Nous allons voir dans ce qui suit que la notion d'événement est entièrement liée à la notion d'ensemble ; seul le vocabulaire fait la différence entre les notions *ensemblistes* et *probabilistes*.
Univers. On appelle *univers* ou *espace fondamental* l'ensemble Ω des issues envisagées d'une expérience aléatoire. Les éléments de Ω sont appelés *issues* ou encore *événements élémentaires*.
Evénement. On appelle événement tout sous-ensemble de Ω. L'ensemble vide $\emptyset$ désigne l'événement *impossible* alors que Ω désigne l'événement *certain*.

Exemple I.2.1. *Nous décrivons 4 expériences et les univers associés.*

(i) Jeu de pile ou face : Ω *={pile,face}.*

(ii) Lancer de deux dés : $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$.

(iii) Nombre d'utilisations d'une voiture avant panne : $\Omega = \mathbb{N}$.

(iv) Durée de bon fonctionnement d'un appareil : $\Omega = \mathbb{R}^+$.

Ci-dessous nous décrivons quelques événements.

Expérience	*événement*	*description*
(i)	*"obtenir pile"*	*{pile}*
(ii)	*"la somme est inférieure à 3"*	$\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$
(ii)	*"somme est égale à 5"*	$\{(4,1),(1,4),(2,3),(3,2)\}$
(iii)	*"panne après 3 utilisations"*	$\{4,5,\dots\}$
(iv)	*"l'appareil est tombé en panne après 8h de marche"*	$]8,+\infty[$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On notera que dans ces expériences aléatoires, l'univers est fini pour (i) et (ii), infini dénombrable pour (iii) et infini non dénombrable pour (iv).

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.2.4 Tribu

Exercices :
Exercice A.1.5

Pour une expérience aléatoire donnée, nous ne considérons pas toujours tous les événements mais seulement ceux qui sont disponibles ou intéressants, d'où la notion de *tribu*.

Définition I.2.1. *Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire. On appelle tribu ou σ-algèbre toute famille $\mathcal{F}$ de parties de Ω satisfaisant :*

i- $\Omega \in \mathcal{F}$;

ii- *si* $A \in \mathcal{F}$ *alors* $\bar{A} \in \mathcal{F}$ *(stabilité par passage au complémentaire) ;*

iii- *si* $(A_i)_{i \in I}$ *est une famille dénombrable d'événements alors :*

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{F} \quad \text{(stabilité par réunion dénombrable)}$$

Remarque I.2.1. *Attention ! $\mathcal{F}$ est une famille de parties de Ω. Il faut donc écrire $A \in \mathcal{F}$ et non pas $A \subset \mathcal{F}$.*

Proposition I.2.1. *Une tribu est stable par intersection dénombrable.*

Démonstration. En exercice.

Proposition I.2.2. *Soit $\mathcal{C}$ une famille de parties de Ω. Alors il existe une et une seule plus petite tribu (au sens de l'inclusion) contenant $\mathcal{C}$, on l'appelle la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ et on la note $\mathcal{F}(\mathcal{C})$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{C}$ est encore une tribu ; elle est alors la plus petite au sens de l'inclusion.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple I.2.2. *$\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu dite exhaustive (elle contient tous les événements).*

Exemple I.2.3. *La tribu engendrée par $\{\Omega\}$ est la tribu triviale $\{\emptyset, \Omega\}$*

Exemple I.2.4. *Pour le jeu de pile (p) ou face (f) la tribu exhaustive est*

$$\{\emptyset, \{p\}, \{f\}, \{p, f\}\}.$$

Exemple I.2.5. *Soit*

$$\mathcal{C} = \{[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_p, b_p] \subset \mathbb{R}^p | -\infty < a_i < b_i < +\infty, i = 1, \ldots, p\}.$$

La tribu $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ engendrée par $\mathcal{C}$ est appelée tribu des Boréliens, elle est notée $\mathcal{B}$. Cette tribu joue un rôle particulier dans la définition des variables aléatoires réelles (chapitre 3).

Définition I.2.2. *Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire et $\mathcal{F}$ une tribu d'événements de Ω. Alors le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ est appelé espace probabilisable.*

I.2.5 Espace probabilisé

Exercices :
Exercice A.1.6

Documents :
Document B.1.1

Définition I.2.3. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espace probabilisable. On appelle probabilité (ou mesure de probabilité) l'application* P*, définie sur* $\mathcal{F}$ *à valeurs dans* $[0,1]$ *qui vérifie :*

i- $P(\Omega) = 1$.

ii- *pour toute famille finie ou infinie dénombrable* $(A_i)_{i \in I}$ *d'événements deux à deux incompatibles (i.e.* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *si* $i \neq j$*) :*

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i).$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *est alors appelé espace probabilisé.*

Proposition I.2.3. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace probabilisé et* A *et* B *deux éléments de* $\mathcal{F}$*, alors :*

i- $P(\emptyset) = 0$.

ii- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

iii- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

iv- $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

v- $(A \subset B) \Rightarrow (P(A) \leq P(B))$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Evénement négligeable ou presque sûr. On dit que $A \in \mathcal{F}$ est négligeable (resp. presque sûr) si $P(A) = 0$ (resp. $P(A) = 1$). Attention ! un événement négligeable (resp. presque sûr) n'est pas nécessairement l'événement impossible (resp. certain).
Suite monotone d'événements. On dit d'une suite $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ d'événements qu'elle est croissante (resp. décroissante) si pour tout $i \geq 1$ on a $A_i \subset A_{i+1}$ (resp. $A_{i+1} \subset A_i$).

Proposition I.2.4. *Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite croissante (resp. décroissante) d'événements, alors :*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n) \quad \left(\textit{resp. } P\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n)\right).$$

Démonstration. Voir le document attaché B.1.1.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.3 Equiprobabilité et probabilités géomètriques

I.3.1 Equiprobabilité

Parmi les mesures de probabilité une se distingue particulièrement. Il s'agit de l'équiprobabilité qui correspond au cas où Ω est fini non vide, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et chaque issue a la même probabilité p. Ainsi on a :

$$P(\Omega) = 1 \Leftrightarrow \sum_{\omega \in \Omega} p = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{|\Omega|},$$

et pour tout $A \subset \Omega$:

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Par conséquent, en situation d'équiprobabilité le calcul d'une probabilité se ramène systématiquement au calcul du rapport :

$$\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

ce qui conduit systématiquement à dénombrer les cas favorables et les cas possibles.

Exemple I.3.1. *Lorsqu'on jette 1 dé, l'univers Ω est constitué des éléments $\{1, \ldots, 6\}$. Si A est l'événement "obtenir un nombre pair" alors $A = \{2, 4, 6\}$, par conséquent $P(A) = 3/6 = 1/2$.*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.3.2 Dénombrement

Exercices :
Exercice A.1.7
Exercice A.1.8

p-liste. Soit E un ensemble à n éléments. On appelle *p-liste* d'éléments de E tout p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ composé d'éléments de E.

Exemple I.3.2. *Lorsqu'on jette 3 dés l'univers Ω est constitué des 3-listes d'éléments de $\{1, \ldots, 6\}$.*

Proposition I.3.1. *Le nombre de p-listes d'un ensemble à n éléments est n^p ; c'est aussi le nombre d'applications allant d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments.*

Démonstration. $n^p = n$ choix pour le premier élément de la liste $\times n$ choix pour le second $\times \ldots \times n$ choix pour le dernier.

Définition I.3.1. *On appelle arrangement de p éléments parmi n toute p-liste d'éléments distincts ordonnés d'un ensemble à n éléments.*

Proposition I.3.2. *Le nombre d'arrangements de p éléments parmi n est noté A_n^p et vaut :*

$$\begin{cases} \frac{n!}{(n-p)!} & \textit{si} \quad 0 \leq p \leq n, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. n choix pour le premier élément de la liste $\times(n-1)$ choix pour le second $\times \ldots \times (n-(p-1))$ choix pour le dernier = $n!/(n-p)!$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Définition I.3.2. *Un arrangement de n éléments parmi n est appelé une permutation d'un ensemble à n éléments.*

Remarque I.3.1. *Les permutations d'un ensemble à n éléments correspondent aux différentes façons d'ordonner les n éléments d'un ensemble.*

Proposition I.3.3. *Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $n!$.*

Démonstration. Il y en a exactement $A_n^n = n!$.

Définition I.3.3. *L'ensemble des p-listes non-ordonnées que l'on peut former avec un arrangement de p éléments parmi n est appelé combinaison de p éléments parmi n.*

Proposition I.3.4. *Le nombre de combinaisons à p éléments d'un ensemble à n éléments est noté C_n^p et vaut :*

$$\begin{cases} \frac{n!}{p!(n-p)!} & \textit{si} \quad 0 \leq p \leq n, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Par définition on a : $C_n^p \times p! = A_n^p$.

Exemple I.3.3.

- *Dans une course de 20 chevaux la probabilité de gagner le tiercé dans l'ordre est de $1/A_{20}^3$.*
- *Au loto la probabilité d'avoir les 6 bons numéros est de $1/C_{49}^6$.*
- *Le nombre de façons de disposer n convives autour d'une table qui compte n places est $n!$.*

I.3.3 Probabilités géomètriques

Exercices :
Exercice A.1.9

Nous nous sommes jusque là essentiellement contentés d'exemples où l'univers est un ensemble fini. La notion d'équiprobabilité est reservée aux univers finis, mais on peut toutefois envisager une notion équivalente pour les parties mesurables de $\mathbb{R}^p$ de la manière suivante.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ un ensemble tel que :

$$0 < \int_\Omega dx_1 \dots dx_p = \text{mes}(\Omega) < +\infty.$$

Remarque I.3.2. *Ici "mes" peut être une longueur, une surface, un volume, une intégrale curviligne, etc.*

On appelle mesure de probabilité uniforme sur Ω ou encore probabilité géométrique, la mesure de probabilité définie par :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p), \quad P(B) = \frac{\text{mes}(B \cap \Omega)}{\text{mes}(\Omega)}.$$

Exemple I.3.4. *Si $\Omega = [a, b]$ avec $-\infty < a < b < +\infty$ alors la probabilité uniforme sur Ω est définie par :*

$$P(A) = \frac{\textit{longueur}(A \cap [a, b])}{\textit{longueur}([a, b])} = \frac{\textit{longueur}(A \cap [a, b])}{b - a}.$$

Exemple I.3.5. *Si* $\Omega = C(O,R)$ *(cercle de centre* O *et de rayon* $R > 0$*) et si* P *est la probabilité uniforme sur* Ω *alors par exemple , en notant* A *l'arc de cercle défini par les angles* $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$*, on a :*

$$P(A) = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi}.$$

Exemple I.3.6. *Si* $\Omega = D(O,R)$ *(disque de centre* O *et de rayon* R*) et si* P *est la probabilité uniforme sur* Ω*, on a par exemple :*

$$P(D(O,r)) = \begin{cases} \frac{r^2}{R^2} & \textit{si} \quad r \in [0,R], \\ 1 & \textit{si} \quad r > R. \end{cases}$$

Paradoxe de Bertrand. Le paradoxe de Bertrand évoqué dans l'introduction correspond à deux choix distincts de probabilités uniformes pour traiter un même problème...

I.4 Conditionnement et indépendance

I.4.1 Probabilités conditionnelles

On a affaire à une population de n individus dont $n_B > 0$ ont les yeux bleus, n_M sont myopes et $n_{B\cap M}$ sont myopes aux yeux bleus. Posons-nous cette question : on choisit un individu au hasard dans la population, l'individu choisi a les yeux bleus, quelle est la probabilité qu'il soit myope ?

Formellement. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, $B \in \mathcal{F}$ un événement de probabilité non nulle et $M \in \mathcal{F}$ un événement quelconque. Comment calculer la probabilité de M lorsque l'on sait que B s'est réalisé ?

Approche fréquentiste. On réalise n (choix de n individus) expériences aléatoires. On note n_B le nombre de fois où un événement B (avoir les yeux bleus) de $\mathcal{F}$ se réalise au cours des n expériences. Ce qui nous intéresse ici est le nombre de fois où $M \cap B$ (myopes aux yeux bleus) se réalise relativement au nombre de fois où B se réalise puisque l'on tient pour certitude le fait que B a lieu. Donc la probabilité qui nous intéresse est donnée par :

$$\frac{n_{M\cap B}}{n_B} = \frac{n_{M\cap B}}{n} \times \frac{n}{n_B} \approx \frac{P(M\cap B)}{P(B)}.$$

Il apparaît donc naturel de définir la **probabilité de** M **sachant** B, notée $P(M|B)$ ou $P_B(M)$, par $P(M\cap B)/P(B)$.

Définition I.4.1. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et B un événement de probabilité non nulle. Soit $A \in \mathcal{F}$ on appelle probabilité de A sachant B, notée $P(A|B)$ ou $P_B(A)$, la probabilité que A se réalise sachant que B s'est réalisé et on a :*

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Propriétés.

- si A et B sont incompatibles alors $P(A|B) = 0$;
- si $A \subset B$ alors $P(A|B) = P(A)/P(B)$;
- si $B \subset A$ alors $P(A|B) = 1$.

Exemple I.4.1. *On lance un dé. Il retombe ! Alors les issues possibles de cette expérience sont dans $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ et P correspond à l'équiprobabilité. Soit B l'événement {obtenir un nombre pair}. On a*

$$P(\{x\}|B) = \frac{P(\{x\} \cap \{2,4,6\})}{P(\{2,4,6\})} = \frac{|\{x\} \cap \{2,4,6\}|}{|\{2,4,6\}|} = \begin{cases} 1/3 & \textit{si } x \textit{ est pair}, \\ 0 & \textit{sinon}. \end{cases}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.4.2 Formule de Bayes

Exercices :
Exercice A.1.10
Exercice A.1.11

Proposition I.4.1. *Si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est une suite d'événements deux à deux incompatibles et* B *non négligeable alors :*

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n|B\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} P(A_n|B).$$

Démonstration.

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n|B\right) = P\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\right)\cap B\right)/P(B)$$

$$= P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} (A_n\cap B)\right)/P(B) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} P\left(A_n\cap B\right)/P(B) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} P\left(A_n|B\right).$$

La troisième égalité provient du fait que $(A_n\cap B)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles.

Proposition I.4.2 (formule des probabilités totales). *Soient* $(\Omega,\mathcal{F},P)$ *un espace probabilisé et* $(A_n)_{n\in I}$ *un système complet d'événements de probabilités strictement positives. Soit* $A\in\mathcal{F}$ *alors*

$$P(A) = \sum_{n\in I} P(A|A_n)P(A_n).$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Démonstration. $\Omega = \cup_{n\in I} A_n$ et les A_n sont deux à deux disjoints, donc

$$P(A) = P(A\cap\Omega) = P\left(A\cap\left(\bigcup_{n\in I} A_n\right)\right)$$
$$= P\left(\bigcup_{n\in I}(A\cap A_n)\right) = \sum_{n\in I} P(A\cap A_n)$$
$$= \sum_{n\in I} P(A|A_n)P(A_n).$$

Proposition I.4.3 (formule de Bayes). *Soit $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espace probabilisé, $(A_n)_{n\in I}$ un système complet d'événements de probabilités strictement positives et A un événement non négligeable. Alors pour tout $n\in I$ on a*

$$P(A_n|A) = \frac{P(A|A_n)P(A_n)}{\sum_{i\in I} P(A|A_i)P(A_i)}.$$

Preuve. Par définition d'une probabilité conditionnelle on a

$$P(A_n|A) = \frac{P(A\cap A_n)}{P(A)} = \frac{P(A|A_n)P(A_n)}{P(A)}.$$

En appliquant la formule des probabilités totales à $P(A)$ on obtient la formule de Bayes.

Proposition I.4.4 (formule des probabilités composées). *Soit $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espace probabilisé et $A_1,\ldots,A_n$ n événements de $\mathcal{F}$. On a*

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1\cap A_2)\ldots P(A_n|A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}),$$

si $A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}$ est non négligeable.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Preuve. Par définition d'une probabilité conditionnelle la formule est vraie pour $n = 2$. Supposons la formule vraie au rang $n-1$, alors en notant $A = \cap_{i=1}^{n-1} A_i$ on a par définition d'une probabilité conditionnelle :

$$P(A_n \cap A) = P(A_n|A)P(A).$$

L'hypothèse de récurrence conduit immédiatement au résultat.

I.4.3 Indépendance stochastique

Exercices :
Exercice A.1.12
Exercice A.1.13
Exercice A.1.14
Exercice A.1.15

Documents :
Document B.1.2

Définition I.4.2. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace probabilisé et* A *et* B *deux événements de* $\mathcal{F}$. A *et* B *sont dits indépendants en probabilité ou stochastiquement indépendants si* $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Remarque I.4.1. *La définition ci-dessus prend tout son sens lorsqu'on la réécrit sous la forme* $P(A|B) = P(A)$ *ou* $P(B|A) = P(B)$ *; ce qui signifie que la réalisation d'un des deux événements n'influence en rien la probabilité de réalisation de l'autre.*

Exemple I.4.2. *Monsieur et Madame X ont dix enfants et seulement des filles. Madame X attend un autre enfant. Quelle est la probabilité que ce soit un garçon ? Bien sûr c'est 1/2 !*

Définition I.4.3. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace probabilisé. Soit* $I \subset \mathbb{N}$ *et* $(A_n)_{n\in I}$ *une famille d'événements de* $\mathcal{F}$. *Les événements de* $(A_n)_{n\in I}$ *sont stochastiquement indépendants si*

$$\forall J \subset I \quad P\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} P(A_j).$$

Exemple I.4.3. *On jette deux fois un dé non pipé. On définit les événements*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

– A = *{on obtient un nombre pair au premier coup}* ;
– B = *{on obtient un nombre impair au second coup}* ;
– C = *{on obtient deux résultats de même parité}*.

Ces événements sont indépendants deux à deux mais $\{A, B, C\}$ *n'est pas une famille d'événements indépendants.*

Proposition I.4.5 (formule de Poincaré). *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace probabilisé et* $A_1, \ldots, A_n$ n *événements de* $\mathcal{F}$. *On a*

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

Démonstration. Voir le document attaché B.1.2.

Exemple I.4.4. *Pour* $n = 3$ *la formule de Poincaré s'écrit :*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

$$-P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Ce résultat est facile à admettre avec un dessin.

Annexe A
Exercices

A.1 Exercices de cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.1

Montrer que si le centre de la corde est choisi au hasard sur le disque, alors la probabilité cherchée est de 1/4.

Solution

Exercice A.1.2

Donner une forme simplifiée des ensembles :

a- $(A \cup B) \cap (A \cup C)$;

b- $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B)$.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.3

Représenter sur le plan l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \{0,1\}$ définie par $f(x,y) = 1_{[0,1]}(x)1_{[0,x]}(y)$. Montrer que $f(x,y) = 1_{[0,1]}(y)1_{[y,1]}(x) = 1_T(x,y)$ où $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \le y \le x \le 1\}$.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.4

Exprimer les événements suivants à l'aide des événements A, B et C et des opérations intersection, réunion et complémentaire.

a- les trois événements ont lieu ;

b- A et B ont lieu, mais pas C ;

c- au moins un des événements A, B et C a lieu ;

d- au plus un des événements A, B et C est réalisé ;

e- exactement un des événements A, B ou C est réalisé.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.5

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable et $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite dénombrable d'événements de $\mathcal{F}$. Montrer que :

$$\bigcap_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{F}.$$

Aide : Noter $B_n = \bar{A}_n$ et considérer $\cup_{n\geq 1} B_n$.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.6

Y a-t-il une contradiction entre les probabilités : $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,2$ et $P(A \cup \overline{B}) = 0,7$?

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.7

A l'oral d'un examen, un étudiant doit répondre à 8 questions sur un total de 10.

a- Combien de choix possibles y a-t-il ?

b- Combien de choix y a-t-il s'il doit répondre aux trois premières questions ?

c- Combien de choix y a-t-il s'il doit répondre au moins à 4 des 5 premières questions ?

Solution

Exercice A.1.8

Combien y a-t-il de pièces dans un jeu de dominos sachant que sur chaque pièce figurent deux symboles choisis parmi {blanc, 1, 2, 3, 4, 5, 6} ?

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.9

Dans un stand de tir à l'arc la cible est circulaire, située à 100 mètres du pas de tir, d'un rayon de 50 cm. Sur cette cible sont dessinés des cercles concentriques de rayons 10, 20, 30 et 40 cm qui forment cinq couronnes. Un impact dans la plus petite couronne rapporte 50 points, 40 points pour la couronne immédiatement supérieure, etc. La probabilité qu'un tireur rate la cible est 10 fois l'inverse de la distance qui sépare le tireur de la cible ; un tel résultat entraîne une pénalité de 10 points. Chaque tireur tire une fois et, lorsque la cible est atteinte, la probabilité qu'une zone donnée de la cible soit touchée est uniforme.

Quels scores peut réaliser un tireur et quelles sont les probabilités correspondantes ? Même question lorsqu'un tireur tire deux fois.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.10

On a décelé dans un élevage de moutons, une probabilité $0,3$ pour qu'un animal soit atteint par une maladie M. La probabilité qu'un mouton qui n'est pas atteint par M ait une réaction négative à un test T est $0,9$. S'il est atteint par M, la probabilité qu'il ait une réaction positive à T est $0,8$. Quelle est la probabilité qu'un mouton pris au hasard et ayant une réaction positive soit atteint par M ?

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.11

On cherche un parapluie qui, avec la probabilité $p/7$, se trouve dans l'un quelconque des 7 étages d'un immeuble. On a exploré en vain les 6 premiers étages. Quelle est la probabilité que le parapluie se trouve au 7^e étage ?

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.12

Soient deux événements A et B définis sur le même espace de probabilité.

a- Si A est négligeable, montrer que A et B sont indépendants ;

b- Même chose si A est presque sûr.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.13

On lance 2 dés non pipés, un dé noir et un dé blanc. Soit A l'événement “le chiffre du dé noir est pair”, B l'événement “le chiffre du dé blanc est impair”, C l'événement “les 2 chiffres ont même parité”. Montrer que A et C, A et B, B et C sont indépendants, mais que les trois événements A , B et C ne le sont pas.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.14

Le pourcentage d'étudiants qui réussissent les u.v. A, B et C, sont : A : 50%, B : 40%, C : 30%, A et B : 35%, B et C : 20%, C et A : 20% et 15% réussissent les trois u.v. Quel est le pourcentage d'étudiants qui obtiennent au moins l'une des trois u.v ?

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.15

Soient A et B deux événements indépendants. Montrer que $\overline{A}$ et B, A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

A.2 Exercices de travaux dirigés

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.1

Soient A, B et C des parties d'un ensemble E.

a- simplifier : $A \cap (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B} \cup C)$;

b- simplifier : $(A \cup (\overline{A} \cap B)) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$;

c- montrer que : $(A \cup B \cup C) \cap (\overline{A} \cup \overline{B} \cup C) = (A \Delta B) \cup C$.

Exercice A.2.2

Dire, en justifiant votre réponse, si les ensembles suivants sont dénombrables ou pas.

a- Les entiers relatifs pairs ;

b- Les nombres rationnels ($\mathbb{Q}$) ;

c- Le segment $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.3

Soit $\mathcal{F}$ une σ-algèbre de sous-ensembles de Ω et soit $B \in \mathcal{F}$. Montrer que $\mathcal{R} = \{A \cap B \ : \ A \in \mathcal{F}\}$ est une σ-algèbre de sous-ensembles de B.

Exercice A.2.4

Soient $(\Omega, \mathcal{F}_1)$ et $(\Omega, \mathcal{F}_2)$ deux espaces probabilisables.

a- Montrer que $(\Omega, \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2)$ est un espace probabilisable.

b- Montrer qu'en général, $(\Omega, \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$ n'est pas un espace probabilisable (prendre $\Omega = \{a, b, c\}$).

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.5

On jette trois dés. Soient A l'événement *"obtenir au moins un as"*, B l'événement *"2 faces montrent le même résultat au moins"*, C l'événement *"la somme des faces est paire"* et D l'événement $B \cap C$.

a- Quel est l'espace fondamental ?

b- Donner l'expression d'un événement élémentaire et de sa probabilité.

c- Calculer les probabilités des événements A, B, C et D.

Exercice A.2.6

Le programme d'une épreuve d'examen comporte 100 sujets. Trois d'entre eux, tirés au sort, sont proposés à chaque candidat. Un candidat n'ayant étudié que le quart des sujets du programme subit l'épreuve. Quelle est la probabilité que ce candidat ait étudié :

1. les trois sujets proposés ?
2. deux de ces sujets ?
3. aucun des trois ?
4. au moins l'un des trois ?

Exercice A.2.7

Soit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, avec $a > b \geq 0$, les coordonnées d'un point M du plan. Soit O l'origine du plan et D la droite d'équation $y = x$. On considère Ω l'ensemble des chemins monotones allant de O à M. Soit Ω' le sous-ensemble des chemins de Ω qui touchent ou traversent D. Soient I et J les points de coordonnées respectives $(1, 0)$ et $(0, 1)$. On note par E et F les sous-ensembles de chemins de Ω' passant respectivement par I et J.

a- Montrer que $|E| = |F|$ (en utilisant une symétrie).

b- Calculer $|\Omega|$, $|E|$ et $|\Omega'|$.

c- En déduire qu'il y a exactement $C_{a+b}^{a} - 2C_{a+b-1}^{a}$ chemins monotones reliant O et M qui restent strictement en-dessous de D.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.8

A un examen se présentent 100 individus dont n sont des filles. On a observé que parmi les filles il y a 10% de mentions et seulement 5% chez les garçons.

i- 7% des étudiants ont eu une mention. Quelle est le nombre de filles ayant passé l'examen ?

ii- Un étudiant a eu une mention. Quelle est la probabilité que ce soit un garçon ?

Exercice A.2.9

Dans une entreprise pharmaceutique, la production d'une variété d'ampoules est assurée par n machines, $M_1, M_2, \ldots, M_n$ $n \geq 2$, dans des proportions respectives $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. On sait d'autre part que les proportions respectives d'ampoules défectueuses fabriquées par ces machines sont respectivement $p_1, p_2, \ldots, p_n$. On choisit au hasard dans la production de ces n machines une ampoule et on constate qu'elle n'est pas défectueuse. Calculer la probabilité que cette ampoule ait été fabriquée par la machine M_k $(1 \leq k \leq n)$.

Exercice A.2.10

Montrer que le nombre de façons de distribuer r balles identiques dans n cases est égal à C^r_{n+r-1}.

Exercice A.2.11

Soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au carré $\mathcal{K}$ de côté de longueur $R > 0$. On choisit un point au hasard uniformément dans $\mathcal{C}$, montrer que la probabilité que ce point soit dans $\mathcal{K}$ est de $2/\pi$.

Exercice A.2.12

Combien faut-il mettre de raisins dans un kilogramme de pâte pour que, en mangeant une part de gâteau de 50 g, on ait au moins 99 chances sur 100 de manger du raisin ?
Indication : négliger la masse des raisins !

Exercice A.2.13

Des individus ne transmettent que deux informations (V et F) dont l'une est vraie (V) et l'autre fausse (F). Un individu I_1 reçoit l'information correcte qu'il transmet à un individu I_2. I_2 la transmet à son tour à un individu I_3 qui la transmet alors à I_4 et ainsi de suite. Un individu quelconque a une probabilité $p \in]0,1[$ de transmettre correctement l'information qu'il a reçue. On note p_n la probabilité que I_n reçoive une information correcte.

a- Calculer p_1, p_2 et p_3.

b- Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par $u_{n+1} = au_n + b$ où $(a, b) \in (\mathbb{R}\setminus\{1\}) \times \mathbb{R}$. Démontrer que pour $n \geq 1$ on a :

$$u_{n+1} = a^n u_1 + b\left(\frac{1-a^n}{1-a}\right).$$

c- Établir une relation entre p_{n+1} et p_n pour $n \geq 1$. En déduire p_{n+1} en fonction de n et p.

d- Calculer $\lim_{n\to+\infty} p_n$. Que peut-on en conclure ?

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.14

Un monsieur distrait écrit n lettres différentes à n personnes distinctes et ferme les enveloppes avant d'avoir écrit les adresses, qu'il inscrit ensuite au hasard. Quelle est la probabilité qu'un destinataire au moins reçoive la lettre qui lui était destinée ?

Exercice A.2.15

On effectue une expérimentation sur le comportement des rats, consistant à les faire choisir entre deux portes A et B. Si le rat choisit la porte A, il reçoit une décharge électrique et la porte reste fermée ; s'il choisit la porte B, elle s'ouvre et le rat sort.

On constate expérimentalement qu'il y a deux types de rats : la probabilité conditionnelle pour qu'un rat sorte par la porte B au k^e essai, sachant qu'il a échoué $k-1$ fois à la porte A, est $p_k = 1/2$ pour les rats du type I (rats sans mémoire) et est $q_k = k/(k+1)$ pour les rats de type II (rats avec mémoire).

a- Calculer, pour le type I et le type II, les probabilités P_n et Q_n qu'un rat sorte au n^e essai.

b- On choisit au hasard un rat dans une population contenant 60% de rats du type I et 40% de rats du type II. Calculer la probabilité conditionnelle que le rat soit du type II sachant qu'il est sorti au n^e essai, pour les valeurs suivantes $n = 1$, 2, 3 et 4.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.16

Une école d'ingénieurs a N élèves dont n_1 élèves en première année, n_2 élèves en deuxième année et n_3 élèves en troisième année. On tire au sort deux élèves parmis N. L'un dit qu'il est plus ancien que l'autre dans l'école.

a- Quelle est la probabilité qu'il soit en deuxième année ?

b- Quelle est la probabilité qu'il soit en troisième année ?

Exercice A.2.17

La mercière de Saint-Martin-sur-Yvette joue avec ses boutons. Dans une boîte à ouvrage, elle a mélangé v boutons verts avec r boutons rouges. Elle en prend un au hasard, puis le remet dans la boîte avec c boutons de la même couleur. Elle recommence n fois ce processus. Montrer que la probabilité de saisir un bouton vert la n-ième fois est indépendante de n.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.18

Dans une bibliothèque n livres sont exposés sur une étagère rectiligne et répartis au hasard. Parmi ces n livres, k sont du même auteur A, les autres étant d'auteurs tous différents. Calculer la probabilité qu'au moins p livres de A se retrouvent côte-à-côte dans les cas suivants :

a- $n = 20$, $k = 3$, $p = 3$;

b- $n = 20$, $k = 5$, $p = 2$.

Exercice A.2.19

Soit f une application de $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ dans $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ (deux espaces probabilisables). Soit $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{F}_2 \ : \ f^{-1}(A) \in \mathcal{F}_1\}$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une σ-algèbre.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.20

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé. On considère une suite $(B_n)_{n\geq 1}$ d'événements de $\mathcal{F}$ qui vérifie $B_{n+1} \subset B_n$ pour tout $n \geq 1$ (suite décroissante d'événements) et $\cap_{n\geq 1} B_n = \emptyset$.

a- On pose $A_n = B_n \cap \overline{B_{n+1}}$, $n \geq 1$. Montrer que $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$.

b- Montrer que $B_m = \cup_{n\geq m} A_n$ pour tout $m \geq 1$.

c- En déduire que $\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = 0$.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.21

Une expérience aléatoire consiste à jeter un dé non truqué jusqu'à l'obtention d'un as. Définir l'univers associé à cette expérience et calculer la probabilité que l'expérience se termine au n-ième coup.

Exercice A.2.22

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements de $\mathcal{F}$. On définit :

$$A = \limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m.$$

I- On suppose que $\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) < \infty$.

a- Décrire en une phrase les événements élémentaires qui constituent A. En déduire une relation entre A et $\bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m$ pour $n \geq 1$.

b- Montrer que $P(A) = 0$.

II- On suppose que les événements de la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ sont indépendants et que $\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = +\infty$.

(a) Exprimer $\overline{A}$ en fonction des événements de $(A_n)_{n\geq 1}$.

(b) Démontrer que pour $x \in \mathbb{R}$, $1 - x \leq \exp(-x)$.

(c) Montrer que pour $n \geq 1$: $P(\cap_{m=n}^{+\infty} \overline{A}_m) = 0$.

(d) Déduire de ce qui précède que $P(A) = 1$.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.23

Un conducteur sobre a 1 chance sur 1000 d'avoir un accident de voiture au cours d'une période. Un conducteur ivre a une chance sur 50 d'avoir un accident de voiture au cours de la même période. On admet qu'un conducteur sur 100 conduit en état d'ivresse.
Quelle est la probabilité pour qu'il y ait un accident et que le conducteur soit ivre ?

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.24

On note S_n^p le nombre d'applications surjectives d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à p éléments $(p \leq n)$.

a- Déterminer S_n^1 et S_n^2.

b- Montrer que $\sum_{k=1}^{p} C_p^k S_n^k = p^n$.

c- Application : au pays de Lilliput, il y a trois types de comportement devant les œufs. Une personne sur trois les mange durs alors que deux sur trois les mangent à la coque. Parmi les amateurs d'œufs à la coque, il y a autant de grosboutistes qui les mangent par le gros bout, que de petitsboutistes qui les mangent par le petit bout. Considérons un échantillon de n personnes, choisies indépendamment et avec remise. Calculer la taille minimale de l'échantillon pour qu'il contienne au moins une personne de chaque type avec une probabilité supérieure à 0,95.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.25

Un distributeur automatique de billes reçoit ses ordres sous forme d'une suite de "bits" 0 ou 1 qu'il lit de gauche à droite. Il est positionné au départ au-dessus du premier tiroir T_1 d'une suite de n tiroirs.

Tout 0 déclenche la chute d'une bille, tout 1 provoque le déplacement, sans chute de bille, de l'automate au-dessus du tiroir suivant. Les billes sont indiscernables.

I- Quel nombre N de bits 0 ou 1 doit contenir le code donné à la machine pour qu'en fin d'exécution elle soit positionnée sur le $n^{\text{ème}}$ tiroir et ait distribué exactement p billes ?

II- En supposant que tous ces codes à N bits puissent être choisis avec la même probabilité, calculer la probabilité des événements suivants :

a- A_k : "il y a k billes dans T_1 et $p-k$ billes dans T_n" pour $k \in \{1, 2, \cdots, p-1\}$,

b- B : "tous les tiroirs sont vides sauf T_1 et T_n entre lesquels sont réparties les p billes",

c- C : "tous les tiroirs sont vides sauf deux entre lesquels sont réparties les p billes",

d- D : "il y a au moins une bille dans chacun des n tiroirs" (ceci pour $p \geq n$).

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.26

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé. Soient $A_1, \ldots, A_n$ n événements de $\mathcal{F}$, non négligeables, deux à deux incompatibles et de réunion égale à Ω.

a- Redémontrer la formule des probabilités totales : pour tout $A \in \mathcal{F}$, $P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A|A_k)P(A_k)$.

b- Redémontrer la formule de Bayes : si A est non négligeable et si $1 \leq j \leq n$ alors

$$P(A_j|A) = \frac{P(A|A_j)P(A_j)}{\sum_{k=1}^{n} P(A|A_k)P(A_k)}.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.27

N personnes dont a hommes attendent à l'entrée d'un dispensaire. Le médecin ne peut recevoir que n d'entre elles (on suppose $n \leq a$ et $n \leq N - a$). Pour tout entier k de $\{0, 1, \cdots, n\}$ quelle est la probabilité qu'il y ait exactement k hommes parmi les n personnes reçues. En déduire

$$\sum_{k=0}^{n} C_a^k C_{N-a}^{n-k}$$

en fonction de n et N.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.28

La `Française des Jeux` s'interroge sur les probabilités d'obtenir k bons numéros plus le complémentaire au jeu du loto (pour $k = 3$, 4 ou 5). Deux personnes X et Y sont chargées d'effectuer les calculs. Afin d'éviter les erreurs on décide que X et Y adopteront des points de vue différents :

a- X adopte le point de vue de la Française des Jeux, c'est-à-dire que 6 numéros sont fixés sur la grille et elle tire 6+1 boules sans remise dans une urne qui en contient 49.

b- Y adopte le point de vue du joueur, c'est-à-dire qu'elle considère les 7 numéros choisis par la Française des Jeux fixés et elle en choisit 6 au hasard sur la grille ;

Mener les calculs de X et Y et comparer les résultats obtenus.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.29

On dispose de six boîtes dont les compositions respectives sont : B_i contient i boules rouges et $6-i$ boules noires pour $i = 1, \ldots, 6$. On note $\mathcal{R}$ l'événement : {la boule tirée est rouge}, $\mathcal{B}_i$ l'événement {on tire dans B_i} (pour le deuxième tirage on les notera $\mathcal{R}_2$ et $\mathcal{B}_{i,2}$).

I- On lance un dé non pipé puis on tire une boule dans la boîte dont l'indice est le numéro de la face obtenue.

   a- Calculer la probabilité que la boule tirée soit rouge.

   b- Si on a tiré une boule rouge quelle est la probabilité que ce soit dans la boîte B_6 ?

II- On remet en place la première boule tirée. Si elle était rouge on tire une boule dans B_6, sinon, on choisit au hasard l'une des cinq autres boîtes, et on y tire une boule. Calculer $P(\mathcal{R}_2|\bar{\mathcal{R}})$ puis $P(\mathcal{R}_2)$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.30

Une puce se déplace entre trois points A, B et C. Au départ elle est en A. À chaque étape, elle quitte sa position et gagne indifféremment l'un des deux autres points. On note α_n, β_n et γ_n les probabilités qu'elle se trouve respectivement en A, B et C à l'issue de la n^e étape (on pose $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = \gamma_0 = 0$).

a- Calculer α_1, β_1, γ_1 et α_2, β_2, γ_2.

b- Exprimer α_{n+1}, β_{n+1} et γ_{n+1} en fonction de α_n, β_n et γ_n.

c- Calculer α_n, β_n et γ_n en fonction de n.

Aide. On a $D = P^{-1}AP$ où :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.31

Une urne contient initialement b boules blanches et r boules rouges. On effectue des tirages successifs d'une boule de cette urne selon le protocole suivant : si à un rang quelconque on obtient une boule rouge, celle-ci est remise dans l'urne avant le tirage suivant et si à un rang quelconque on obtient une boule blanche, on la mange !

a- Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche au cours des n premiers tirages ?

b- Quelle est la probabilité de manger au moins une boule blanche au cours des n premiers tirages ?

c- Sachant qu'au cours des n premiers tirages on a tiré exactement une boule blanche, quelle est la probabilité qu'elle ait été tirée en dernier ?

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.32

Soit X_n un ensemble de cardinal n. On note π_n le nombre de partitions de X_n, ce nombre s'appelle le nombre de *Bell* d'indice n. On conviendra que $\pi_0 = 1$.

a- Caculer π_1, π_2 et π_3.

b- Soit X_n un ensemble de cardinal n ($n \geq 1$) et soit a un élément fixé de X_n. Soit $P = \{A_1, \ldots, A_k\}$ une partition quelconque de X_n, on suppose que A_1 est l'unique terme de P contenant a. En raisonnant sur le cardinal de A_1 , démontrer la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \pi_n = \sum_{p=1}^{n} C_{n-1}^{p-1} \pi_{n-p} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} \pi_k.$$

c- Vérifier les résultats de la question a- et calculer π_6.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.33

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, A et B deux événements réalisables non indépendants tels que $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$ sont non négligeables.

I- On pose $\alpha = P(A|\overline{B})/P(A|B)$. Montrer que

$$P(B|A) = \frac{P(B)}{\alpha + (1-\alpha)P(B)}.$$

En déduire que $P(B|A)$ est une fonction strictement croissante de $P(B)$.

II- Application : un test est destiné à déceler la présence d'une maladie dans une population.

a- Lorsque la maladie est présente, le test la révèle dans 99% des cas.

b- Lorsque la maladie est absente, le test révèle cette absence dans 99% des cas.

On convient de dire que le test est efficace si, révélant la présence de la maladie chez une personne choisie au hasard dans la population, il y a une probabilité au moins égale à 0,95 que cette personne soit effectivement atteinte de la maladie.
Déterminer à partir de quel pourcentage de personnes atteintes de la maladie dans la population le test est efficace.

Exercice A.2.34

Démontrer que pour deux événements A et B de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on a l'équivalence entre A et B sont indépendants et $P(A \cap B)P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(A \cap \overline{B})P(\overline{A} \cap B)$.

Exercice A.2.35

Dans le repère orthonormé xOy on considère le triangle T de sommets A, B et C de coordonnées respectives $(0, 0)$, $(1, 1)$ et $(2, 0)$. Un point P est choisi de manière uniforme dans T, puis il est projeté en Q appartenant au segment $[A, B]$ suivant la direction Oy. Soit D le point de coordonnées $(x, 0)$, calculer la probabilité que Q appartienne au segment $[A, D]$. Faire un dessin.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.36

On rappelle que $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$. Soit Ω un ensemble fini. Soit $\mathcal{P}(\Omega)$ la famille des sous-ensembles de Ω et $\mathcal{P}_k(\Omega)$ la famille des sous-ensembles de Ω à k éléments ($0 \leq k \leq \mathrm{Card}(\Omega)$).

a- Calculer $\mathrm{Card}(\mathcal{P}_k(\Omega))$.

b- Quelle relation lie $\mathcal{P}(\Omega)$ aux $\mathcal{P}_k(\Omega)$?

c- En déduire $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^{\mathrm{Card}(\Omega)}$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.37

On considère l'épreuve : jet d'une pièce de monnaie jusqu'à ce que face apparaisse. On définit par w_i l'événement "Face apparaît au i-ème jet". On suppose que $P(w_i) = 1/2^i$.

1. L'espace fondamental est-il fini ? infini ? dénombrable ? Justifier la réponse et donner explicitemment l'espace fondamental.
2. Montrer que $\Sigma_i P(w_i) = 1$.

Exercice A.2.38

Sur n boîtes de conserves deux sont avariées. On ouvre successivement ces n boîtes au hasard. Soit k un entier naturel non nul inférieur ou égal à n. On note : A_k l'événement "aucune des k premières boîtes ouvertes n'est avariée".

1. Evaluer (en justifiant la réponse) : $p_{n-1} = P(A_{n-1})$ et $p_n = P(A_n)$.
2. Quelle relation satisfont entre eux les événements A_{k-1} et A_k ?
3. Quelle est la probabilité qu'aucune des k premières boîtes ouvertes ne soit avariée ?

Exercice A.2.39

a- Déterminer Ω dans les cas suivants :

  i- tirer une pièce trois fois.

  ii- deux balles sont tirées sans remise d'une urne contenant deux balles rouges et deux balles bleues.

  iii- lancer une pièce jusqu'à l'obtention de pile.

b- Montrer que si A et B sont deux événements d'une même tribu alors $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$ et $A \Delta B$ sont aussi dans la tribu.

c- Soit A un événement, montrer que si $P(A)$=0 ou 1 alors A est indépendant de tous les autres événements.

Exercice A.2.40

Un voyageur arrive à un carrefour. Il sait qu'à cet endroit il va trouver deux routes : un cul de sac et la bonne route.
Il y a trois frères à ce carrefour : F_1, F_2 et F_3.
F_1 dit une fois sur dix la vérité, F_2 dit cinq fois sur dix la vérité et F_3 dit neuf fois sur dix la vérité.
Le voyageur s'adresse "au hasard" à un et à un seul des trois frères. Il demande son chemin, et s'aperçoit par la suite que ce chemin est le bon. Quelle est la probabilité qu'il se soit adressé à F_1 ?

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.41

Dans un champ contenant n fleurs, un papillon vole au hasard de l'une à l'autre. On suppose que lorsqu'il quitte une fleur, il choisit de façon équiprobable la suivante parmi les autres.

a- Quelle est la probabilité pour qu'il revienne pour la première fois au point de départ après $r \leq n-1$ changements de fleur exactement ?

b- Quelle est la probabilité pour qu'après r changements de fleur, il ne se soit jamais posé deux fois sur la même ?

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.42

Soit un dé à six faces dont deux sont peintes en rouge, deux en jaune et deux en bleu.

a- L'expérience consiste à "lancer deux fois le dé" (ou de façon équivalente "on lance deux dés qui sont identiques"). Décrire l'ensemble fondamental associé à cette expérience et donner la probabilité associée aux issues de cette expérience ?

b- On lance ce dé jusqu'à l'obtention d'une face rouge. Décrire un ensemble fondamental associé à cette expérience.
Quelle distribution (loi) de probabilités lui attribuez-vous ?
On posera $\bar{R} = \{$ face non rouge$\}$.

c- Deux personnes A et B jouent dans cet ordre avec la règle précédente (cf b). Le premier qui obtient une face rouge a gagné.
Quelles sont les probabilités de gain pour chacun des joueurs (le jeu peut durer indéfiniment) ?

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.43

Un voyageur traversant une frontière passe en général successivement les contrôles suivants :
police du pays qu'il quitte - douane du pays où il entre - police du pays où il entre. Considèrons les événements suivants :
A : "le voyageur est contrôlé au premier poste de police"
B : "le voyageur est contrôlé à la douane "
C : "le voyageur est contrôlé au deuxième poste de police"
On suppose connues les probabilités de A, B, C, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ et $A \cap B \cap C$. Quelle est la probabilité que le voyageur soit contrôlé au moins une fois ?

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.44

Il y a un concours de pronostics sur la finale d'un tournoi d'escrime qui oppose un français et un américain. Parmi les participants la moitié sont des anglais, un tiers de français et un sixième des suisses.
Parmi les anglais, 60% prévoient l'américain comme gagnant de la finale et 40% prévoient le français. Chez les français, 30% prévoient l'américain et 70% prévoient le français, enfin chez les suisses 90% prévoient l'américain et 10% prévoient le français. On tire une personne au hasard parmi les participants. Elle prévoit le français gagnant. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un citoyen anglais ?

Exercice A.2.45

Soient A, B, C trois événements de $\mathcal{P}(\Omega)$. On suppose que chacun d'eux est non négligeable[1] et non certain[2].

i- Montrer que si A est indépendant de $B \cap C$ et de $B \cap \bar{C}$ alors A est indépendant de B.

ii- Montrer que A et B ne peuvent pas être simultanément incompatibles et indépendants.

iii- Si $\Omega = A \cup B$, A et B peuvent -ils être indépendants ?

[1]un événement est négligeable si sa probabilité est nulle.
[2]un événement est certain si sa probabilité est égale à un.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.46

Dans une urne il y a dix boules numérotées de 0 à 9.
On tire deux boules au hasard en même temps.

a- Décrire Ω l'espace fondamental associé à cette expérience aléatoire.

b- Soit X la variable aléatoire donnant le plus petit des nombres portés par les deux boules. Donner $E = X(\Omega)$. Soit $x \in E$, donner $X^{-1}(x)$.

Annexe B
Documents

B.1 Démonstrations

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document B.1.1 Démonstration de la proposition 1.2.4

Espace probabilisé Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante d'événements, la suite $(B_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\begin{cases} B_1 = A_1, \\ B_n = A_n \backslash A_{n-1} \quad \text{pour} \quad n \geq 2, \end{cases}$$

est une suite d'événements deux à deux incompatibles telle que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_n.$$

Par conséquent

$$p\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n).$$

Or, $P(B_1) = P(A_1)$ et pour tout $n \geq 1$, $P(B_n) = P(A_n) - P(A_{n-1})$ donc

$$P(A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k),$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} P(B_k) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

Ainsi $P(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.

Si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite décroissante d'événements, alors la suite $(\overline{A_i})_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante d'événements donc $P(\cup_{n=1}^{+\infty}\overline{A_n}) = \lim_{n\to+\infty} P(\overline{A_n})$. Or,

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = P\left(\overline{\bigcup_{n=1}^{+\infty} \overline{A_n}}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \overline{A_n}\right),$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

d'où :

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty} P(\overline{A_n}) = \lim_{n\to+\infty}(1 - P(\overline{A_n})) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document B.1.2 Démonstration de la proposition 1.4.5

Indépendance stochastique En vertu de la proposition I.2.3 la proposition est vraie pour $n = 2$. Faisons l'hypothèse de récurrence qu'elle est vraie au rang $n-1$ et posons $A = \cup_{k=1}^{n-1} A_k$. En appliquant à nouveau la proposition I.2.3 on a

$$P(A \cup A_n) = P(A) + P(A_n) - P(A \cap A_n)$$

$$= P\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right) - P\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} (A_k \cap A_n)\right) + P(A_n).$$

L'hypothèse de récurrence nous permet d'appliquer la formule de Poincaré au rang $n-1$ aux deux premières probabilités, ce qui donne

$$P(A \cup A_n) = P(A_n) +$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n-1} (P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) - P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k} \cap A_n)) \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}),$$

il suffit de remarquer que

$$\{(i_1, \ldots, i_k) \ ; \ 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n\}$$

est réunion disjointe de

$$\{(i_1, \ldots, i_k) \ ; \ 1 \leq i_1 < \ldots < i_k < n\}$$

et

$$\{(i_1, \ldots, i_{k-1}, n) \ ; \ 1 \leq i_1 < \ldots < i_{k-1} < n\}.$$

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

T

U

Solution de l'exercice A.1.1

La corde est de longueur supérieure à la longueur du côté du triangle si son centre appartient au disque inscrit dans le triangle. Le disque inscrit ayant pour rayon $r/2$ (r est le rayon du cercle circonscrit) la proportion de tels points est égale à : $\pi(r/2)^2/\pi r^2 = 1/4$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.2

a- $A \cup (B \cap C)$;

b- B.

Retour à l'exercice ▲

Le graphe de l'application vaut 1 sur le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(1,1)$ (frontière comprise) et 0 ailleurs.
$f(x,y) = 1 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 1$ **et** $y \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq x \leq 1 \Leftrightarrow (x,y) \in T \Leftrightarrow 1_T(x,y) = 1$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.4

a- $A \cap B \cap C$;

b- $A \cap B \cap \bar{C}$;

c- $A \cup B \cup C$;

d- $(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$;

e- $(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.5

Comme $B_n = \bar{A}_n \in \mathcal{F}$ et

$$\overline{\bigcap_{n\geq 1} \bar{A}_n} = \bigcup_{n\geq 1} B_n,$$

le membre de droite de l'égalité ci-dessus est dans $\mathcal{F}$, par conséquent son complémentaire aussi, ce qui démontre le résultat.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.6

$A \subset A \cup \overline{B} \Rightarrow P(A) \leq P(A \cup \overline{B})$ **ce qui est impossible.**

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.7

a- $45 = C_{10}^{8}$;

b- $21 = C_{7}^{5}$;

c- $35 = C_{5}^{4} \times C_{5}^{4} + C_{5}^{5} \times C_{5}^{3}$.

Retour à l'exercice ▲

7 (doubles)+ $C_7^2 = 28.$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.9

Soit A l'événement atteindre la cible. $P(\bar{A}) = 10/100 = 1/10$, donc $P(A) = 9/10$. Les scores possibles sont -10, 10, 20, 30, 40 et 50 pour un tir. On a $P(-10) = P(\bar{A}) = 1/10$, $P(10) = P(10|A) \times P(A) = (Aire(D(0;50)) - Aire(D(0;40)))/Aire(D(0;50)) \times 9/10 = 81/250$, etc. Finalement, les probabilités respectives de 1/10, 81/250, 63/250, 45/250, 27/250 et 9/250.
Pour deux tirs les scores possibles sont -20, 0, 20, 30, etc. Par exemple on a : $P(30) = P((10,20) ou (20,10)) = P(10,20) + P(20,10) = P(10)P(20) + P(20)P(10) = 2 \times 81 \times 63/250^2$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.10

Soit P l'événement "être positif". Formule de Bayes :

$$P(M|P) = \frac{P(P|M)P(M)}{P(P|M)P(M) + P(P|\bar{M})P(\bar{M})} = 24/31.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.11

Soit E l'événement "le parapluie est dans l'immeuble" et E_i ($i = 1, \ldots, 7$) l'événement "le parapluie est au i-ème étage".

$$P(E_7|\bar{E}_1 \cap \ldots \cap \bar{E}_6) = 1 - P(\bar{E}_7|\bar{E}_1 \cap \ldots \cap \bar{E}_6)$$

$$= 1 - P(\bar{E}_7 \cap \bar{E}_1 \cap \ldots \cap \bar{E}_6)/P(\bar{E}_1 \cap \ldots \cap \bar{E}_6) = 1 - \frac{P(\bar{E})}{P(E_7 \cup \bar{E})} = p/(7 - 6p)$$

(on tient compte du fait que le parapluie peut être en dehors de l'immeuble !).

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.12

a- A négligeable $\Rightarrow P(A) = 0$ or $A \cap B \subset A \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(A) = 0$ donc $P(A \cap B) = 0 = 0 \times P(B) = P(A) \times P(B)$ d'où le résultat ;

b- A presque sûr $\Rightarrow P(A) = 1$ et $\bar{A}$ est négligeable. Donc $P(A) \times P(B) = P(B) = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B) = P(A \cap B)$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.13

$P(A) = P(B) = P(C) = 1/2,\ P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(C \cap B) = 1/4$ et $P(A \cap B \cap C) = 0$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.14

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) = 0,6$; **soit 60%.**

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.15

On a $P(A\cap B) = P(A)P(B)$ et $P(\bar{A}\cap B) = P(B) - P(A\cap B) = P(B) - P(B)P(A) = P(B)(1-P(A)) = P(B)P(\bar{A})$ donc B et $\bar{A}$ sont indépendants. Maintenant, en appliquant le même raisonnement à B et $\bar{A}$ on obtient (en passant au complémentaire sur B) que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.2.7

a- On note $\mathcal{C}$ une chemin de E, c'est-à-dire un chemin reliant 0 et M, passant par I et coupant nécessairement D. On note P le dernier point de $\mathcal{C}$ coupant D (c'est-à-dire le point d'ordonnée maximale parmi les points de $\mathcal{C} \cap D$). Maintenant on note $f(\mathcal{C})$ le chemin obtenu à partir de $\mathcal{C}$ de la manière suivante. $f(\mathcal{C})$ relie O et M en passant par P ; la partie qui relie O et P est obtenue par symétrie de la partie OP de $\mathcal{C}$ par rapport à D et la partie qui relie P et M coïncide avec celle de $\mathcal{C}$ (cf. FIG. 1).
$f(\mathcal{C}) \in F$ et il est clair qu'une telle application f est une bijection de E sur F d'où : $|E| = |F|$.

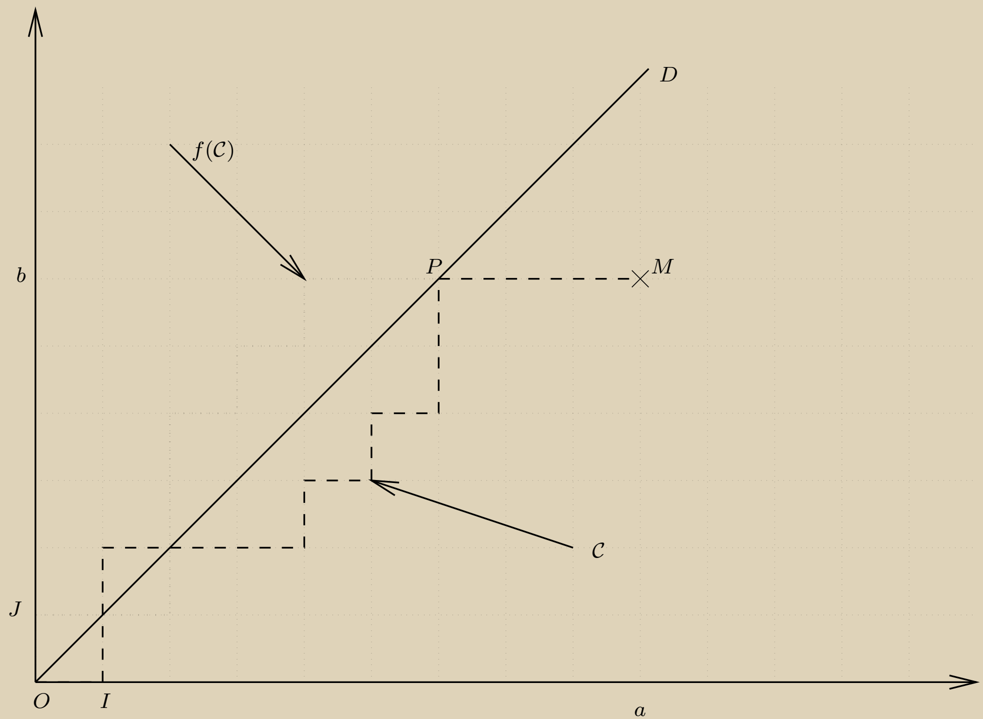

FIG. 1.

b- Soit $\mathcal{C}$ un chemin monotone reliant O et M. Pour parcourir un tel chemin on doit se déplacer successivement d'une unité à droite (d) ou d'une unité vers le haut (h). Pour aller de O à M on doit nécessairement aller a fois à droite et b fois vers le haut. Un chemin monotone reliant O et M est donc une succession de $(a+b)$ instructions dont exactement a instructions d et b instructions h (sur la FIG. 1 : $a = 9$, $b = 6$ et $\mathcal{C}$ est décrit par : $dhhdddhdhdhhddd$). Par conséquent il y a autant de chemins qu'il y a de façons de placer a éléments identiques parmi $(a+b)$ places distinctes ; il s'agit des combinaisons à a éléments d'un ensemble à $(a+b)$ éléments. Donc on a $|\Omega| = C_{a+b}^{a}$.
D'après le **a** on a $|E| = |F|$ donc le nombre de chemins allant de I à M est le même que le nombre de chemins allant de J à M. Comme tous les chemins de F coupent D, le nombre de chemins de F est le nombre de chemins allant de J à M, soit, par un raisonnement analogue à celui ci-dessus, C_{a+b-1}^{a}.
Enfin on a $|\Omega'| = |E| + |F| = 2C_{a+b-1}^{a}$.

c- Les chemins monotones reliant O et M restant strictement en dessous de D sont ceux de $\Omega \backslash \Omega'$. Le nombre cherché est donc :

$$|\Omega \backslash \Omega'| = |\Omega| - |\Omega'| = |\Omega| - 2|E| = C_{a+b}^{a} - 2C_{a+b-1}^{a}.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.2.20

Voir la preuve de la proposition I.2.4 en document B.1.1.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.2.22

Cet exercice (difficile) est résolu dans le chapitre 4. Ce résultat est appelé Lemme de Borel-Cantelli.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.2.28

a- On tire 7 numéros distincts dans $\{1, 2, \dots, 49\}$. Pour tenir compte du fait que le dernier numéro a une place particulière (il s'agit du complémentaire) on tient compte de l'ordre. Par conséquent l'univers Ω est l'ensemble des 7-listes d'éléments distincts et ordonnés de $\{1, 2, \dots, 49\}$. Nous somme dans une situation d'équiprobabilité, par conséquent, pour tout $A \subset \Omega$ on a :

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad \text{où} \quad |\Omega| = A_{49}^7.$$

Soit A_k $(k = 3, 4, 5)$ l'événement *"obtenir k bons numéros plus le complémentaire"*. Pour trouver la probabilité $P(A_k)$ il suffit de calculer $|A_k|$. On a :

$$\begin{array}{rcl}
|A_k| = & C_6^k & (k \text{ no. tirés dans l'urne ont été choisis par X}) \\
\times & A_6^k & (\text{placement des } k \text{ bons no. dans les 6 premières places de la 7-liste}) \\
\times & C_{43}^{6-k} & (6-k \text{ no. sont tirés parmi les 43 non choisis par X}) \\
\times & A_{6-k}^{6-k} & (\text{placement des } 6-k \text{ no. parmi les } 6-k \text{ places restantes} \\
 & & \text{des 6 premières places de la 7-liste}) \\
\times & C_{6-k}^1 & (\text{le complémentaire est choisi parmi les } 6-k \text{ no. de X non encore choisis}) \\
\times & A_1^1 & (\text{on met le complémentaire à la 7-ième place de la 7-liste}).
\end{array}$$

On trouve alors :

$$P(A_k) = \frac{(6!)^2 42! 43!}{k!(5-k)!(6-k)!(37+k)!49!}.$$

b- Dans la situation de Y on tire 6 numéros parmi 49 ; dans ce cas l'univers Ω est composé des 6-listes d'éléments de $\{1, \dots, 49\}$ non ordonnées c'est-à-dire des combinaisons de 6 éléments parmi 49. On a donc toujours équiprobabilité avec $|\Omega| = C_{49}^6$. Pour trouver la probabilité $P(A_k)$ il suffit de calculer $|A_k|$. On a :

$$\begin{array}{rcl}
|A_k| = & C_6^k & (k \text{ no. choisis parmi les 6 bons no. de la Française des Jeux (F.J.)}) \\
\times & C_{42}^{5-k} & (6-(k+1) \text{ mauvais no. choisis parmi ceux non selectionnés par la F.J.}) \\
\times & C_1^1 & (\text{le no. complémentaire pour lequel il n'y a qu'un choix})
\end{array}$$

On trouve alors :

$$P(A_k) = \frac{(6!)^2 42! 43!}{k!(5-k)!(6-k)!(37+k)!49!}.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.2.30

a- La puce est au point A, c'est-à-dire, $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$ et $\gamma_0 = 0$. À la $1^{\text{ère}}$ étape elle quitte le point A et elle part vers le point B ou C avec la même probabilité $1/2$. Considérons les événements :

A_i : {"la puce est au point A à la i^e étape"},
B_i : {"la puce est au point B à la i^e étape"},
C_i : {"la puce est au point C à la i^e étape"}.

FIG. B.1.1 – Les deux premiers sauts

D'après la figure **??** on voit que :

$$\alpha_1 = P(A_1) = 0, \quad \beta_1 = P(B_1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \gamma_1 = P(C_1) = \frac{1}{2},$$

et

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= P(A_2) = P(A_2|B_1)P(B_1) + P(A_2|C_1)P(C_1) = \frac{1}{2}, \\
\beta_2 &= P(B_2) = P(B_2|A_1)P(A_1) + P(B_2|C_1)P(C_1) = \frac{1}{4}, \\
\gamma_2 &= P(C_2) = P(C_2|A_1)P(A_1) + P(C_2|B_1)P(B_1) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

b- À la n^e étape on remarque sur la figure **??** que :

$$\begin{cases}
\alpha_{n+1} = \beta_n/2 + \gamma_n/2, \\
\beta_{n+1} = \alpha_n/2 + \gamma_n/2, \\
\gamma_{n+1} = \alpha_n/2 + \beta_n/2.
\end{cases}$$

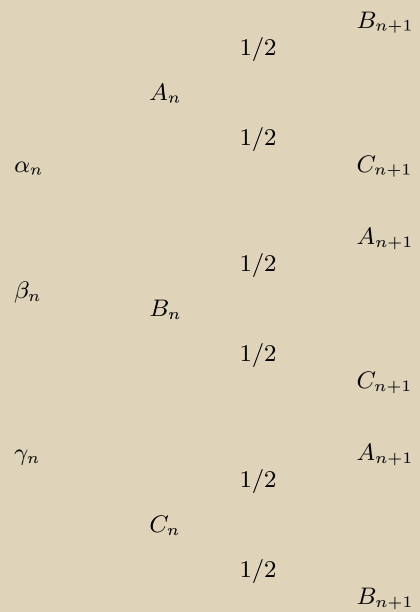

FIG. B.1.2 – L'étape n

c- Alors si on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

on a :

$$X_{n+1} = \frac{1}{2} A X_n,$$

soit encore :

$$X_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n A^n X_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^n P D^n P^{-1} X_0.$$

Or

$$D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

on trouve donc que :

$$\begin{cases} \alpha_n = \frac{1}{3}\left(1 + (-1)^n 2^{-n+1}\right) \\ \beta_n = \frac{1}{3}\left(1 + (-1)^{n-1} 2^{-n}\right) \\ \gamma_n = \frac{1}{3}\left(1 + (-1)^{n-1} 2^{-n}\right) \end{cases}$$

Remarque. On constate que $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim_{n\to+\infty} \beta_n = \lim_{n\to+\infty} \gamma_n = 1/3$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.2.40

Soit V l' événement "dire la vérité" et F_i l' événement "le voyageur s'est adressé à F_i.
Si le voyageur a pris le bon chemin, c'est que le frère auquel il s'est adressé lui a dit la vérité, or

$$P(V|F_1) = \frac{1}{10},\ P(V|F_2) = \frac{5}{10},\ P(V|F_3) = \frac{9}{10}.$$

D'autre part le voyageur a choisi au hasard son informateur, donc :

$$P(F_1) = P(F_2) = P(F_3) = \frac{1}{3}$$

on peut donc utiliser le Théorème de Bayes :

$$P(F_1/V) = \frac{P(V|F_1)P(F_1)}{P(V|F_1)P(F_1) + P(V|F_2)P(F_2) + P(V|F_3)P(F_3)} = \frac{1}{15}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.2.41

a- A chaque changement de fleur, le papillon a $n-1$ choix possibles. Les choix successifs sont des événements indépendants. : soit A_i l'événement "au i-ème changement de fleur, le papillon passe d'une fleur différente de la première à celle ci".

$$P(\bar{A}_i) = \frac{n-2}{n-1} \; (i > 1)$$

La probabilité cherchée est :

$$P(\bar{A}_2 \cdots \bar{A}_{r-1} A_r) = P(\bar{A}_2) \cdots P(\bar{A}_{r-1}) P(A_r) = \frac{n-2}{n-1} \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{n-2}{n-1} \frac{1}{n-1} = \frac{(n-2)^{r-2}}{(n-1)^{r-1}}$$

b- nombre de cas possibles : $(n-1)^r$
Nombre de cas favorables : après s' étre posé sur la i-ème fleur, le papillon doit choisir la suivante parmi les $(n-i)$ fleurs qu'il n'a pas encore visitées. Il y a donc :

$$(n-1)(n-2) \ldots (n-r) = \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!}$$

cas favorables. C'est évidemment le nombre d'arrangements de r objets pris parmi $n-1$. D'où la probabilité cherchée :

$$\frac{(n-1)!}{(n-1)^r (n-r-1)!}.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.2.42

a- Pour un dé $\Omega = \{R, J, B\}$ avec $P(R) = P(J) = P(B) = 1/3$.
Pour deux dés $\Omega = \{(R, R), (R, J), (R, B), (J, R), (J, J), (J, B), (B, R), (B, J), (B, B)\}$. La probabilité de chaque couple étant 1/9.

b- Désignons par $\bar{R}$ l'événement "non rouge" : $\bar{R} = J \cup B$. $\Omega = \{R, \bar{R}R, \bar{R}\bar{R}R, \bar{R}\bar{R}\bar{R}R, \ldots\}$.
$P(\bar{R}\bar{R}\bar{R}\ldots\bar{R}R) = (\frac{2}{3})^{n-1}\frac{1}{3}$, où n est le nombre de lancers pour obtenir la première face rouge.

c-

$$\begin{aligned} P(Agagne) &= P(R) + P(\bar{R}\bar{R}R) + P(\bar{R}\bar{R}\bar{R}\bar{R}R) + \ldots \\ &= \frac{1}{3} + (\frac{2}{3})^2\frac{1}{3} + (\frac{2}{3})^4\frac{1}{3} + \ldots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{2}{3})^{2k}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-(2/3)^2}. \end{aligned}$$

$P(Bgagne) = \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{2}{3})^{2k+1}\frac{1}{3} = \frac{2}{9}\frac{1}{1-(2/3)^2}$.

Retour à l'exercice ▲