SY01 - Éléments de probabilités

Chapitre 2 : Variables aléatoires discrètes

Équipe de mathématiques appliquées

UTC

Automne 2010

Chapitre II
Variables aléatoires discrètes

II.1 Variable aléatoire et probabilités

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.1.1 Introduction

Exercices :
Exercice A.1.1

On considère deux jets indépendants d'un même dé. A cette expérience aléatoire on associe l'ensemble fondamental $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, constitué des couples (ω_1, ω_2) décrivant les résultats successifs des deux épreuves.

Si X réprésente la somme des deux nombres successifs, X peut prendre des valeurs variables $(2, 3, \ldots, 12)$ qui dépendent du hasard.

La relation $X = n$ est vraie pour un certain nombre d'éventualités seulement. Elle définit donc un événement à savoir la partie de Ω constituée par les couples (ω_1, ω_2) tels que $\omega_1 + \omega_2 = n$.

Par exemple, la probabilité de l'événement $\{X = 3\}$ est égale à la probabilité de l'événement $\{(1, 2), (2, 1)\}$ soit $2/36 = 1/18$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.1.2 Variables aléatoires

Exercices :
Exercice A.1.2
Exercice A.1.3

Définition II.1.1. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace probabilisé. On appelle variable aléatoire discrète, définie sur* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *à valeurs dans un ensemble fini ou infini dénombrable* E*, toute application* X *de* Ω *dans* E*, telle que pour tout* x *de* E *on ait :*

$$X^{-1}(\{x\}) = \{w \in \Omega;\ X(w) = x\} \in \mathcal{F}.$$

Si $E = \mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{N}$) on dit qu'on a une variable aléatoire entière (resp. entière positive).

Remarque II.1.1. *Si* $\mathcal{B}(E)$ *est une tribu de parties de* E*, alors on a aussi pour tout* $B \in \mathcal{B}(E)$ *:*

$$X^{-1}(B) = \bigcup_{x \in B} X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{F}.$$

Les événements $X^{-1}(\{x\})$ *et* $X^{-1}(B)$ *sont encore notés* $\{X = x\}$ *et* $\{X \in B\}$*.*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.1.3 Loi de probabilité

Exercices :
Exercice A.1.4

Proposition II.1.1. *Si X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, l'application p_X définie par $p_X(B) = P(\{w,\ X(w) \in B\})$ pour tout $B \in \mathcal{B}$ est une probabilité sur $(E, \mathcal{B})$, où $\mathcal{B}$ est une tribu sur E.*

Démonstration . Vérifier en utilisant la définition 1.2.3 (chapitre 1) que p_X est une probabilité sur $(E, \mathcal{B})$.

Définition II.1.2. *Etant donné une famille $\{p_X(x);\ x \in E\}$ vérifiant $p_X(x) \geq 0$, $\sum_{x \in E} p_X(x) = 1$, on définit une probabilité sur E en posant :*

$$p_X(A) = \sum_{x \in A} p_X(x),$$

pour tout $A \in \mathcal{B}$.

Remarque II.1.2. *Si P est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$, la probabilité d'événements tels que $\{w \in \Omega;\ |X(w)| \geq a\}$ sera écrite indifféremment : $P(\{w \in \Omega;\ |X(w)| \geq a\})$, $P(\{|X(w)| \geq a\})$ ou $P(|X| \geq a)$.*

Définition II.1.3. *L'application p_X définie sur $\mathcal{B}$ par :*

$$p_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right) = P(\{w \in \Omega;\ X(w) \in B\}),\ \forall B \in \mathcal{B},$$

est appelée mesure de probabilité image de X ou loi de probabilité de la v.a. X.

Remarque II.1.3. *L'intérêt principal des variables aléatoires est de permettre de calculer facilement les probabilités de certains événements. Dans l'exemple introductif de ce chapitre, si on note B l'événement "obtenir une somme paire" et si la loi de X est connue alors on a*

$$p_X(B) = p_X(\{2,4,6,8,10,12\}) = \sum_{x\in\{2,4,6,8,10,12\}} p_X(x)$$

$$= \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{3}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{2}.$$

Il eut été beaucoup plus pénible de dénombrer $\{(x,y) \in \{1,\ldots,6\}^2 \ ; \ x+y \text{ est pair}\}$!

Cas particuliers :

- X est une v.a. **certaine** si et seulement si elle est constante quel que soit le résultat de l'épreuve c'est-à-dire $X = a$. Sa loi est alors définie par la relation unique $P\,(X = a) = 1$.
- soit $A \in \mathcal{F}$ et $\Omega = A \cup \overline{A}$. Définissons $X = 1$, si A est réalisé, $X = 0$ sinon, alors $P\,(X = 1) = P(A)$ et $P\,(X = 0) = 1 - P(A)$. On note $X\,(w) = 1_A\,(w)$; X est alors appelée v.a. indicatrice.

II.1.4 Indépendance et fonctions de v.a.

Exercices :
Exercice A.1.5

Proposition II.1.2. *Soit X une v.a. discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, à valeurs dans E. Si f est une application de E dans $\mathbb{R}$, alors $f(X)$ est une v.a. discrète à valeurs dans $F = f(E)$.*

Démonstration. Soit $Y = f(X)$. Y est à valeurs dans $f(E)$, qui est au plus infini dénombrable car $f(E) = \{f(x); x \in E\}$ et E est au plus infini dénombrable. De plus, si $y \in f(E)$, alors :

$$\{Y = y\} = \{f(X) = y\} = \{X \in \{x \in E; y = f(x)\}\} = \cup_{\{x \in E; y = f(x)\}} \{X = x\},$$

il s'agit d'une réunion dénombrable d'événements de $\mathcal{F}$ donc d'un élément de $\mathcal{F}$.

Définition II.1.4. *Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. discrètes à valeurs dans $E_1, \ldots, E_n$, des ensembles dénombrables. Ces variables sont dites indépendantes si quel que soit $A_i \subset E_i$*

$$P\left(X_1 \in A_1; \ldots; X_n \in A_n\right) = P(X_1 \in A_1) \ldots P(X_n \in A_n).$$

Remarque II.1.4. *Ceci est équivalent à (uniquement dans le cas discret !)*

$$P(X_1 = x_1; \ldots; X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \ldots P(X_n = x_n).$$

Ici, les “point-virgules” (;) jouent le rôle de l'intersection ($\cap$).

Proposition II.1.3. *Toute v.a. discrète X à valeurs dans un ensemble au plus infini dénombrable $E = \{x_i; i \in I\}$, est identique en loi à la v.a. discrète :*

$$Y = \sum_{i \in I} x_i 1_{A_i}$$

où $\{A_i, i \in \mathbb{N}\}$ *forme un système exhaustif de* Ω*, tel que* $A_i = \{X = x_i\}$.

Démonstration. Il est clair que Y est à valeurs dans E. De plus, pout tout $j \in I$, $P(Y = x_j) = P(\sum_{i \in I} x_i 1_{A_i} = x_j) = P(1_{A_j} = 1) = P(X = x_i)$ car $\{A_i, i \in I\}$ forme un système exhaustif de Ω.

II.1.5 Fonction de répartition

Exercices :
Exercice A.1.6
Exercice A.1.7

Définition II.1.5. *Soit X une v.a. de loi $p_i = P\left(X = x_i\right),\ i \in I$. On appelle fonction de répartition de la loi de X, la fonction réelle $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$, définie par*

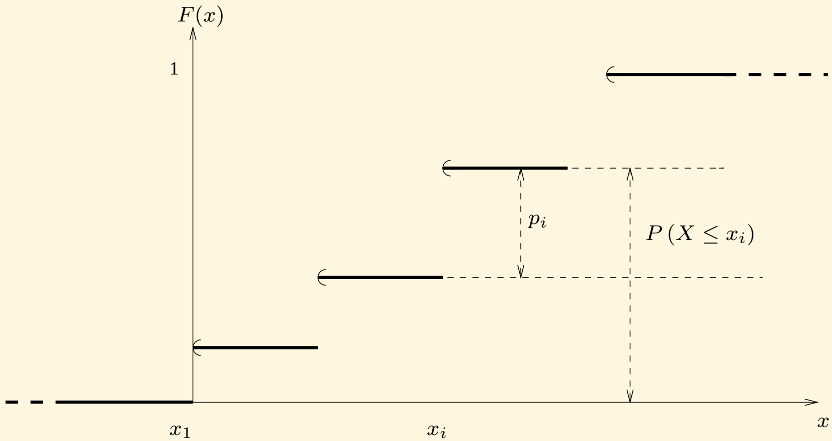
$$F_X(x) = P(X \leq x),\ \forall x \in \mathbb{R},$$

on peut écrire $F_X(x) = \sum_{\{i : x_i \leq x\}} p_i$.

Valeurs possibles x de X	Probabilités correspondantes
x_1	p_1
$\ldots$	$\ldots$
x_i	p_i
$\ldots$	$\ldots$
$\bigcup_{i \in I} x_i$	1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents



Propriétés

- La fonction de répartition est définie sur tout $\mathbb{R}$.
- $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$; $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.
- Si $x_2 > x_1$, alors $F_X(x_2) \geq F_X(x_1)$.
- La fonction de répartition est continue à droite.

Remarque II.1.5. *La donnée de la fonction de répartition permet de calculer la probabilité que la v.a. appartienne à un intervalle, c'est-à-dire :*

- $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a-)$,
- $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$,
- $P(a < X < b) = F_X(b-) - F_X(a)$,
- $P(X = a) = F_X(a) - F_X(a-)$,

où $F_X(a-) = \lim_{\varepsilon\searrow 0} F_X(a-\varepsilon)$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.2 Proriétés des lois

II.2.1 Lois usuelles

Exercices :
Exercice A.1.8
Exercice A.1.9

– **Loi de Bernoulli.** Une v.a. X suit une loi de Bernoulli si $E = \{0, 1\}$ avec $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$, avec $p \in]0, 1[$ et on note $X \sim B(p)$. Toute expérience aléatoire dont l'issue est soit un succès $(X = 1)$, soit un échec $(X = 0)$ est appelée épreuve de Bernoulli.
– **Loi Binomiale.** Lorsqu'on répète indépendamment n épreuves de Bernoulli on obtient un nombre X de succès qui s'écrit :

$$X = X_1 + \ldots + X_n,$$

où les v.a. X_i sont indépendantes et suivent la loi $B(p)$. Il est alors évident que $E = \{0, \ldots, n\}$. La loi de X est appelée loi binomiale et est notée $B(n, p)$. Elle est définie par

$$p_X(k) = P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad 0 \le k \le n.$$

En effet,

$$\{X = k\} = \{X_1 + \ldots + X_n = k\}$$
$$= \bigcup_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \{X_{i_1} = 1 \,; \ldots ; \, X_{i_k} = 1 \,; \text{ autres } X_i = 0\}.$$

Il s'agit d'une réunion d'événements incompatibles donc

$$P(X = k) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} P(X_{i_1} = 1 \,; \ldots ; \, X_{i_k} = 1 \,; \text{ autres } X_i = 0)$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

$$= \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= p^k (1-p)^{n-k} |\{(i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, n\}^k \; ; \; 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n\}|$$

$$= C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

On remarque que

$$\sum_{x \in E} p_X(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1.$$

– **Loi de Poisson.** On appelle loi de Poisson de paramètre λ et on note $\boldsymbol{P}(\lambda)$ la loi sur $\mathbb{N}$, définie par :

$$P(X = x) = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^x}{x!},$$

où $x \in \mathbb{N}, \; \lambda \in \mathbb{R}^{*+}$. Notation : $X \sim \boldsymbol{P}(\lambda)$

– **Loi Géométrique.** Soit X le nombre de fois qu'il faut exécuter de manière indépendante des épreuves de Bernoulli jusqu'à l'obtention du premier succès. La loi d'une telle v.a. est dite géométrique et est notée $G(p)$ si les épreuves de Bernoulli ont pour loi $B(p), \; p \in]0,1[$. Bien sûr, X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et

$$P(Y = k) = P(X_1 = 0; \ldots; X_{k-1} = 0; X_k = 1) = p(1-p)^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}^*,$$

où les var X_i sont indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) suivant la loi $B(p)$.

– **Loi Hypergéométrique.** On pose pour $m, \; n \in \mathbb{N}$ et si $m \leq n$:

$$\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m.$$

On considère une urne contenant N boules, M blanches et $N-M$ noires. On en tire n au hasard sans replacement (i.e. remise). Soit X la v.a. nombre de boules blanches tirées, alors :

$$P(X=m) = \frac{\begin{pmatrix} M \\ m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N-M \\ n-m \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}},$$

pour $m = 0, 1, \ldots, M$. La loi hypergéométrique est notée : $H(N, M, n)$.

II.2.2 Espérance, variance, moments

Exercices :
Exercice A.1.10
Exercice A.1.11
Exercice A.1.12
Exercice A.1.13

Documents :
Document B.1.1
Document B.1.2
Document B.1.3
Document B.2.1

Définition II.2.1. *Soit X une v.a. à valeurs dans E. Si $\sum_{x \in E} |x| P(X = x) < \infty$, on appelle espérance de X et on note $\mathbb{E}[X]$ la quantité $\sum_{x \in E} x P(X = x)$.*

Proposition II.2.1. *Soient X et Y deux v.a. discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans E_X et dans E_Y respectivement. On a*

1. *$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$;*
2. *Si $X \leq Y$ avec probabilité 1, alors $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$.*

Démonstration. Voir document B.1.1.

Théorème II.2.1. *Soient X et Y deux v.a. discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans E_X et dans E_Y respectivement. Si X et Y sont indépendantes $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.*

Démonstration. Voir document B.1.2.

Proposition II.2.2. *Soit X une v.a. à valeurs dans E dénombrable. X a pour loi $\{p(x); x \in E\}$ si, et seulement si, pour tout $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :*

$$\sum_{x \in E} |f(x)| \, p(x) < +\infty,$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

$$\mathbb{E}\left[f(X)\right] = \sum_{x \in E} f(x)p(x). \tag{II.2.1}$$

Démonstration. Voir document B.1.3.

Remarque II.2.1. *L'intégrale de Riemman-Stieltjès introduite en B.2.1 permet d'adopter la notation $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dF(x)$ pour la quantité définie en II.2.1.*

Remarque II.2.2. *Lorsque $f(x) = x$ et $\sum_{x \in E} |x|\, p(x) < \infty$ alors $\mathbb{E}\left[X\right] = \sum_{x \in E} xp(x)$. Plus généralement, on définit pour une telle v.a. le moment d'ordre n comme $\mathbb{E}\left[X^n\right]$ si $\mathbb{E}\left[|X^n|\right] < \infty$ et on a $\mathbb{E}\left[X^n\right] = \sum_{x \in E} x^n p(x)$.*

Définition II.2.2. *Soit X une v.a. discrète telle que $\mathbb{E}\left[X^2\right] < \infty$, on appelle variance de X, la quantité :*

$$\mathrm{Var}\,(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X\right])^2\right] = \sum_{x \in E}(x - m)^2 p(x).$$

De plus, la quantité $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$ est appelée écart-type de X.

Définition II.2.3. *On appelle moment centré d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$ de X le nombre réel, s'il existe, noté μ_r et défini par :*

$$\mu_r = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^r] = \sum_{x \in E}(x - \mathbb{E}[X])^r p(x).$$

Propriétés.

- $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.
- $\mathrm{Var}\,(aX) = a^2 \mathrm{Var}\,(X)$, $a \in \mathbb{R}$.
- $\mathrm{Var}\,(X + b) = \mathrm{Var}\,(X)$, $b \in \mathbb{R}$.
- Si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes alors

$$\mathrm{Var}(X_1 + \ldots + X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \ldots + \mathrm{Var}(X_n).$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

TAB. II.1 – caractéristiques des lois usuelles.

Lois	Espérance	Variance
Bernoulli $B(p)$	p	$p(1-p)$
Binomiale $B(n,p)$	np	$np(1-p)$
Poisson $P(\lambda)$	λ	λ
Géométrique $G(p)$	$1/p$	$(1-p)/p^2$

II.2.3 Fonctions génératrices

Exercices :
Exercice A.1.14
Exercice A.1.15

Définition II.2.4. *Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ (entière) et soit $p_n = P(X = n)$. La fonction définie par*

$$g(u) = \mathbb{E}\left[u^X\right] = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n u^n,$$

$(-1 \leq u \leq 1)$ *s'appelle la fonction génératrice de la v.a. X.*

Remarque II.2.3. *$g(u)$ est indéfiniment dérivable sur $]-1, 1[$ et $g^{(n)}(0) = p_n n!$, ceci montre que la fonction génératrice détermine la loi de X.*

Remarque II.2.4. *Si $0 \leq u < 1$, on a :*

$$g'(u) = \mathbb{E}\left[X u^{X-1}\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} n p_n u^{n-1},$$

mais si $u \uparrow 1$, $g'(u)$ converge soit vers une limite finie $g'(1)$, soit diverge vers $+\infty$ et on convient alors que $g'(1) = +\infty$. Comme par ailleurs $X u^{X-1} \uparrow X$, on a $\mathbb{E}[X] = g'(1) = \lim_{u \uparrow 1} g'(u)$ (finie ou infinie).

De même on établit que si $\mathbb{E}[X] < \infty$, $\mathbb{E}[X(X-1)] = g''(1) = \lim_{u \uparrow 1} g''(u)$ finie ou infinie et on en déduit que $\mathrm{Var}(X) = g''(1) + g'(1) - (g'(1))^2$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Proposition II.2.3. *La fonction génératrice de la somme de deux variables entières indépendantes est le produit des fonctions génératrices.*

Démonstration.

$$g_{X+Y}(u) = \mathbb{E}[u^{X+Y}] = \mathbb{E}[u^X u^Y] = \mathbb{E}[u^X]\mathbb{E}[u^Y] = g_X(u)g_Y(u),$$

en vertu du fait que X et Y sont indépendantes.

TAB. II.2 – Fonctions génératrices des lois usuelles.

Lois	Fonction génératrice
Bernoulli $B(p)$	$1 - p + pu$
Binomiale $B(n, p)$	$(1 - p + pu)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$\exp(-\lambda + \lambda u)$
Géométrique $G(p)$	$\dfrac{pu}{1 - (1 - p)u}$

II.2.4 Convolution

Exercices :
Exercice A.1.16

Définition II.2.5. *On appelle convolution des suites numériques* $(a_n)_{n\geq 0}$ *et* $(b_n)_{n\geq 0}$ *la suite numérique* $(c_n)_{n\geq 0}$, *notée* $(a_n * b_n)$ *dont le terme général est défini par :*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Proposition II.2.4. *Soient* X *et* Y *deux v.a. entières indépendantes de lois respectives* p_X *et* p_Y. *Alors, la loi de la somme est notée* p_{X+Y} *et vaut* $p_X * p_Y$.

Démonstration. Il est clair que $E_{X+Y} = \mathbb{N}$ et que p_{X+Y} est définie (pour $n \in \mathbb{N}$), par :

$$p_{X+Y}(n) = P(X+Y=n)$$

$$P(X+Y=n\ ;\ \bigcup_{k=0}^{n}\{Y=k\})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(X=n-k\ ;\ Y=k) = \sum_{k=0}^{n} p_X(n-k)p_Y(k),$$

d'où le résultat.

II.2.5 Inégalité

Exercices :
Exercice A.1.17

Proposition II.2.5 (inégalité de Bienaymé-Chebyshev). *Soit X une v.a. discrète admettant une espérance mathématique $\mathbb{E}(X) = m$ et une variance $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a :*

$$P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} P(|X-m| \geq \varepsilon) &= \sum_{\{x \in E;\ |x-m| \geq \varepsilon\}} p_X(x) \\ &\leq \sum_{\{x \in E;\ |x-m| \geq \varepsilon\}} \left(\frac{|x-m|}{\varepsilon}\right)^2 p_X(x) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{x \in E} (|x-m|)^2 p_X(x) \\ &= \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Interprétation. En prenant $\varepsilon = k\sqrt{\mathrm{Var}(X)} = k\sigma$ où $k > 0$ on obtient

$$P(|X - \mathbb{E}[X]| > k\sigma(X)) \leq \frac{1}{k^2}.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe A
Exercices

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

A.1 Exercices de cours

Exercice A.1.1

Décrire les événements $\{X = 7\}$ et $\{X \geq 10\}$ et donner leurs probabilités.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.2

On lance deux dés et on s'intéresse aux résultats obtenus. Définir l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ correspondant à cette expérience aléatoire. Montrer que les applications suivantes définissent des v.a.r. discrètes.

a- $X(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \omega_2$;

b- $Y(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 - \omega_2$;

c- $Z(\omega_1, \omega_2) = (\omega_1 - \omega_2)^2$.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.3

Soit $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ un espace fondamental. On considère les familles d'ensembles $\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega\}$.

a- Soit X l'application identité définie sur Ω. X est-elle une v.a.r. sur $(\Omega, \mathcal{F}_1)$? Sur $(\Omega, \mathcal{F}_2)$?

b- Soit Y l'application définie sur Ω par $Y(\omega) = 1$ si ω est impair et $Y(\omega) = 0$ si ω est pair. Y est-elle une v.a.r. sur $(\Omega, \mathcal{F}_1)$? Sur $(\Omega, \mathcal{F}_2)$?

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.4

Donner les lois des v.a.r. définies dans les exercices A.1.2 et A.1.3.

Solution

Exercice A.1.5

Les v.a. X et Y de l'exercice A.1.2 sont-elles indépendantes ?

Solution

Exercice A.1.6

Donner les f.d.r. des lois des v.a.r. définies dans les exercices A.1.2 et A.1.3.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.7

Soit F la fonction définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1, \\ 0,29 & \text{si} \quad -1 \leq x < 1, \\ 0,37 & \text{si} \quad 1 \leq x < 7, \\ 0,69 & \text{si} \quad 7 \leq x < 11, \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 11. \end{cases}$$

a- Vérifier que F est bien une f.d.r.

b- Soit X la v.a. admettant F pour f.d.r. ; quelle est la loi de X ?

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.8

Parmi les lois usuelles, quelle est celle qui modélise le mieux :

a- Le nombre d'étudiants ayant réussi l'U.V. SY01 ?

b- Le nombre de grilles de loto jouées pour gagner pour la première fois ?

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.9

Une corbeille de fruits contient 3 pêches jaunes et 5 blanches. Avant de partir en cours Pierre prend 2 pêches au hasard dans la corbeille. Quelle est la probabilité que Pierre goûte les deux types de pêches ?

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.10

Retrouver les données de la table II.1.

Solution

Exercice A.1.11

Soit X une v.a. de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer $\mathbb{E}\left[(1+X)^{-1}\right]$.

Solution

Exercice A.1.12

Montrer que $\mathrm{Var}\,(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \left(\mathbb{E}\left[X\right]\right)^2.$

Solution

Exercice A.1.13

Le nombre X de kg de tomates récoltés dans un jardin en une semaine, est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la suivante :

x	0	1	2	3
$p_X(x)$	$0,1$	$0,5$	$0,3$	$0,1$

a- Quelle est l'espérance mathématique de X et quelle est sa variance ?

b- Pendant les six semaines de la saison de récolte, la distribution de probabilité ne varie pas. Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire Y donnant *la récolte totale en kg durant les six semaines.*

Solution

Exercice A.1.14

Démontrer que si X est une v.a.r. entière admettant un moment d'ordre 2, alors :

a- $\mathbb{E}(X) = g'_X(1)$;

b- $\mathrm{Var}(X) = g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2$.

Solution

Exercice A.1.15

Calculer les fonctions génératrices données dans la table II.2 et retrouver les moyennes et variances des lois considérées.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.16

Montrer que si X et Y sont deux v.a. indépendantes de lois respectives $B(n,p)$ et $B(m,p)$ alors $X+Y \sim B(n+m,p)$. Utiliser les fonctions génératrices, puis la convolution.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.17

Soit $X \sim P(1)$. Calculer $P(|X-1|>2)$ de manière exacte puis en donner une majoration.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

A.2 Exercices de travaux dirigés

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.1

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{-2,-1,0,1,2\}$, telle que $p_X(-2)=p_1$, $p_X(-1)=p_2$, $p_X(0)=p_3$, $p_X(1)=p_4$ et $p_X(2)=p_5$.

a- Que doivent vérifier p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5 ?

b- On suppose pour la suite que $p_1=p_2=p_3=p_4=p_5$. Calculer l'espérance et la variance de X.

c- Soit $Y=X^2$. Y est-elle une variable aléatoire discrète ? Si oui, donner sa loi.

d- Tracer F_X et F_Y (si elle existe).

e- Soit Z une v.a. de Fdr $F_Z(x)=\frac{1}{2}1_{[0,+\infty[}(x)+\frac{1}{3}1_{[1,+\infty[}(x)+\frac{1}{6}1_{[4,+\infty[}(x)$. Donner la loi de Z.

Exercice A.2.2

Soient X et Y deux v.a. indépendantes de lois respectives :

$$P(X = 1) = p_1 \;;\; P(X = 2) = p_2,$$

$$P(Y = 1) = q_1 \;;\; P(Y = 2) = q_2,$$

avec $0 < p_1 < 1$; $0 < p_2 < 1$; $0 < q_1 < 1$; $0 < q_2 < 1$, satisfaisant de plus $p_1 + p_2 = 1$ et $q_1 + q_2 = 1$. On pose : $Z_1 = \min(X,\ Y)$; $Z_2 = \max(X,\ Y)$; $Z_3 = Z_2 - Z_1$; $Z_4 = Z_1 + Z_2$.

a- Déterminer les lois de probabilités de Z_1, de Z_2, du couple (Z_1, Z_2) de Z_3 et de Z_4.

b- Les v.a. Z_1 et Z_2 sont-elles indépendantes ?

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.3

L'oral d'un examen comporte vingt sujets possibles. Le candidat tire trois sujets au hasard, parmi ces trois sujets il choisit le sujet qu'il désire traiter. Ce candidat a révisé seulement douze sujets. On considère la v.a. X, nombre de sujets révisés parmi les trois sujets tirés.

a- Quelle est la loi de X ?

b- Quelle est la probabilité que le candidat obtienne au moins un sujet révisé ?

Exercice A.2.4

Un lot contient 3% de pièces défectueuses. On prélève au hasard un échantillon de 10 pièces. Les pièces étant très nombreuses, on admet que le tirage peut être considéré comme fait au hasard et avec remise. Soit X la variable aléatoire “nombre de pièces défectueuses dans l’échantillon”.

a- Quelle est la loi de X ? Que valent $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{Var}[X]$?

b- Calculer $P(X = 0)$ et $P(X \geq 1)$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.5

On considère deux avions, un biréacteur B et un quadriréacteur Q. On suppose que tous les réacteurs de ces avions ont la même probabilité p de tomber en panne et qu'ils sont indépendants les uns des autres. Soient X et Y les v.a. indiquant respectivement le nombre de réacteurs de B et Q tombant en panne au cours d'un même vol.

a- Etablir les lois de probabilité de X et Y.

b- On estime qu'un avion ne peut achever son vol que si la moitié au moins de ses réacteurs fonctionne normalement. Soient P_B et P_Q les probabilités d'un vol réussi respectivement par un biréacteur et par un quadriréacteur. Donner P_B et P_Q en fonction de p. Indiquer selon les valeurs de p l'avion qui offre le plus de sécurité.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.6

Notons p l'application suivante :

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{N}^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ k & \mapsto & p(k) = \theta(1-\theta)^{k-1}, \end{array}$$

pour $\theta \in \mathbb{R}$. On rappelle que la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $x \neq 1$, est donnée par :

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

On en déduit que :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \text{sur} \quad]-1, 1[.$$

a- Pour quelles valeurs de θ, l'application p définit-elle une loi de probabilité ?

b- Soit X une variable aléatoire réelle d'ensemble fondamental $\mathbb{N}^*$ et de loi p.

   i- Trouver la valeur de θ pour laquelle $P(X \leq 1) = P(X > 1)$. Notons θ_0 cette valeur.

   ii- Calculer $P(X > 2 | X > 1)$ pour $\theta = \theta_0$.

   iii- On note F_X la fonction de répartition de X. Calculer $F_X(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et θ quelconque.

c- La loi de X est-elle une loi de probabilité connue ?

d- Donner un exemple concret d'une variable aléatoire X qui suit cette loi.

e- En considérant la fonction f calculer l'espérance mathématique et donner (sans calcul) la variance de la variable aléatoire X.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.7

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. telle que $X_n \sim B(n;p_n)$ et $\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda \in]0,+\infty[$. Montrer que lorsque $n \to +\infty$, la loi de X_n converge vers une loi de Poisson de paramètre λ.

Exercice A.2.8

Paris est interdit à la circulation pour laisser le champ libre aux voitures officielles. Entre l'Etoile et Orly, il y a 13 feux tricolores qui fonctionnent de manière indépendante. Chacun est au rouge un tiers du temps. Soit X le nombre de feux rouges qu'une escorte de motards ignore sur son passage.

a- Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance et sa variance.

b- Le cortège qui conduit un ministre à l'aéroport est lancé à 120 km/h sur les Champs Elysées. Le chauffeur du ministre s'arrête brusquement au premier feu rouge qu'il rencontre en créant un carambolage avec les véhicules chargés de le protéger. On note Y le nombre de feux franchis avant l'accident. Déterminer la loi de Y et son espérance.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.9

Soit X une v.a. de loi uniforme sur $\{1,\ldots,n\}$ ($P(X=k)=1/n$ pour $1\leq k\leq n$). Quelle est la fonction de répartition de X ? Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{Var}[X]$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.10

Soit X de loi $P(\lambda)$ et Y de loi $P(\mu)$ indépendantes. Quelle est la loi de $X + Y$? *Indication* : utiliser la convolution et les fonctions génératrices.

Exercice A.2.11

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$. On suppose que la variable aléatoire X satisfait :

$$P(X = -1) = p_1, \; P(X = 1) = p_2,$$

avec $p_1 \in [0, \frac{1}{2}]$ et $p_2 \in [0, \frac{1}{2}]$ et que la loi de Y est uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$.

a- Donner les lois de X et Y.

b- Déterminer la loi de $S = X + Y$.

c- On définit la variable aléatoire Z par :

$$Z = \begin{cases} \theta_1, & \text{si} \qquad X + Y = 0, \\ \theta_2, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où θ_1 et θ_2 sont deux entiers distincts fixés.

i- Montrer que la loi de Z ne dépend pas de p_1 et p_2.

ii- Déterminer les valeurs de θ_1 et θ_2 de sorte que $\mathbb{E}(Z) = 3$ et $\text{Var}(Z) = 2$.

iii- Retrouver $\mathbb{E}(Z)$ et $\text{Var}(Z)$ à l'aide de la fonction génératrice de Z.

Exercice A.2.12

On dispose d'une boîte contenant initialement a boules rouges et b boules blanches ($a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$). On tire une boule au hasard puis on la remet dans la boîte, ainsi qu'une autre boule de la même couleur. Puis on recommence.

On note R_i l'événement $\{$la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est rouge$\}$, B_i l'événement $\{$la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est blanche$\}$. On considère la variable aléatoire :

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad R_i, \\ 0, & \text{si} \quad B_i. \end{cases}$$

a- Quelle est la loi $\mathcal{L}$ de X_1 ? Calculer son espérance.

b- Calculer $P(R_2|R_1)$ et $P(R_2|B_1)$. Quelle est la loi de X_2 ?

c- On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

i- Dans quel ensemble $\mathcal{S}_n$ la variable aléatoire S_n prend-elle ses valeurs ? Soit $k \in \mathcal{S}_n$. Si $S_n = k$, quelle est la composition de la boîte après le $n^{\text{ème}}$ tirage ? En déduire $P(X_{n+1} = 1|S_n = k)$.

ii- Montrer que :

$$P(X_{n+1} = 1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a+k}{a+b+n} P(S_n = k).$$

iii- En déduire que :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{a}{a+b+n} + \frac{\mathbb{E}[S_n]}{a+b+n}.$$

d- On fait l'hypothèse de récurrence :

$$\mathcal{P}_n \ : \ (X_1, \cdots, X_n \ \text{ suivent la loi } \mathcal{L} \text{ du a}).$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

i- Si $\mathcal{P}_n$ est vraie calculer $\mathbb{E}[S_n]$.

ii- Montrer que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.13

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. de Bernoulli telle que pour tout $n \geq 1$: $P(X_n = -1) = q$ et $P(X_n = 1) = p = 1 - q$. On pose :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Soit $T = \min\{t \in \mathbb{N}^* \; ; \; S_t = 1\}$, on note $p_t = P(T = t)$.

a- Calculer p_1 et p_2 puis montrer que :

$$\forall t \geq 3 \quad p_t = q(p_1 p_{t-2} + p_2 p_{t-3} + \cdots + p_{t-2} p_1).$$

b- Montrer que la fonction génératrice G_T de T vérifie :

$$G_T(z) = pz + qz(G_T(z))^2.$$

En déduire que

$$G_T(z) = \frac{1}{2qz}\left(1 - \sqrt{1 - 4pqz^2}\right)$$

puis que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_{2k} = 0 \quad \text{et} \quad p_{2k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{2q} C^k_{1/2} (4pq)^k,$$

où pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $C^k_\alpha = \dfrac{\alpha \times (\alpha - 1) \times \cdots \times (\alpha - k + 1)}{k!}$. Illustrer ce résultat par un dessin.

c- Montrer que :

$$G_T(1) = \begin{cases} p/q & \text{si} \quad p < q, \\ 1 & \text{si} \quad p \geq q. \end{cases}$$

Comment interpréter la quantité $G_T(1)$?

d- Montrer que :

$$\mathbb{E}(T) = \begin{cases} (p-q)^{-1} & \text{si} \quad p > q, \\ +\infty & \text{si} \quad p = q. \end{cases}$$

e- On suppose que X_n est le gain d'un joueur à la n-ième partie d'un jeu. Quel sens peut-on donner aux quantités S_n et T ? Comment interpréter les résultats du c et du d ?

Solution

Exercice A.2.14

Une entreprise cherche à organiser sa production. Elle produit des machines spécialisées de type A toutes différentes. Elle a une probabilité 0,6 de vendre immédiatement chacune des machines de type A qu'elle produit. On suppose qu'elle en produit trois.

a- Quelle est la probabilité qu'elle vende les trois ?

b- Quelle est la probabilité qu'elle en vende au moins deux ?

c- Indiquer la loi de probabilité de la variable aléatoire X indiquant le nombre de machines vendues.

d- Quelle est l'espérance mathématique de X ? Préciser sa signification.

Exercice A.2.15

a- Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Déterminer la loi de X sachant que : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et qu'il existe $p \in]0,1[$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = pP(X \geq n)$.

b- Soient X et Y deux v.a. indépendantes de même loi géométrique $G(a)$. Déterminer $P(X = Y)$ et $P(2Y \leq X)$.

Exercice A.2.16

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ de loi : $P(X = k) = (1-\theta)\theta^{k-1}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, et $\theta \in]0,1[$.Pour $n_0 \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y = \min\{n_0, X\}$ et $Z = \max\{n_0, X\}$.

a- Déterminer la loi de Y.

b- Déterminer la loi de Z.

Montrer que si X est une v.a. entière alors : $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$.

Exercice A.2.17

Considèrons une suite de v.a. de Bernoulli indépendantes $X_1, X_2, \cdots$ de paramètre p où $p \in]0,1[$. Soient les événements : $A_1 = \{X_1 = 1\}, \cdots, A_n = \{X_1 = 0, X_2 = 0, \cdots, X_n = 1\}$ pour $n \geq 2$ et $E = \{$nous n'observons aucun as$\}$.

a- Calculer la probabilité de A_n.

b- Exprimer E à l'aide des A_n. Calculer la probabilité de E.

c- Soit T_1 le premier instant où 1 apparaît dans la suite de réalisations de X_k. Déterminer la loi de T_1.

d- Soit T_2 le premier instant après T_1 où 1 apparaît de nouveau. Montrer que les v.a. $T_2 - T_1$ et T_1 sont indépendantes et de même loi.

e- Quelle est la loi de T_2 ?

Exercice A.2.18

I- Dans l'algorithme qui suit la fonction ALEA renvoie un nombre aléatoire compris entre 0 et 1 et uniformément distribué sur $[0,1]$. De plus, les résultats des appels successifs d'ALEA sont indépendants. Soit $p \in]0,1[$, on considère l'algorithme suivant :

```
X=1
Tant que (ALEA > p)
  Faire
    X = X + 1
  Fin de Faire
```

X étant le résultat obtenu en fin d'algorithme, trouver la loi de la variable aléatoire X. De quelle loi connue s'agit-il ?

II- Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. On rappelle que si $x \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$ alors :

$$\sum_{j=0}^{n} x^j = 1 + x + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

a- Déterminer g la fonction génératrice de la variable aléatoire X. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et Var(X).

b- Pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, montrer que $P(X > k + n | X > n) = P(X > k)$.

c- Soient Y et Z deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p.

i- Soit S la variable aléatoire définie par $S = Y + Z$. Lorsque $S = s$, où $s \geq 2$, quelles sont les valeurs possibles des variables aléatoires Y et Z ?

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

ii- Déterminer la loi de $S = Y + Z$.

iii- Calculer $P(Y = j|S = s)$ et préciser les valeurs possibles de j. Quel fait surprenant fait apparaître ce résultat ?

Exercice A.2.19

Soit X de loi géométrique $G(p)$. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{Var}[X]$.

Exercice A.2.20

Ma fille Camille achète régulièrement chez le libraire des images (1 F l'unité) du film *Le Roi Lion*. Elle colle chaque image, qui n'est pas un double d'une image précédente, dans un petit album où se trouvent 200 places numérotées. Je me demande combien va me coûter en moyenne le remplissage de l'album. On suppose que le libraire dispose en même quantité de chaque modèle d'image ; on note Y_{200} le nombre d'images à acquérir pour avoir les 200 images différentes. On note X_k $(k = 1, \ldots, 200)$ le nombre d'images à acquérir pour avoir k images différentes sachant qu'on a déjà $k-1$ images différentes.

a- Calculer $\mathbb{E}(Y_{200})$ en fonction de $\mathbb{E}(X_1), \ldots, \mathbb{E}(X_{200})$.

b- Calculer $P(X_k = n)$ $(k = 1, \ldots, 200)$; en déduire que X_k suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

c- En déduire $\mathbb{E}(Y_{200})$ sachant que $\sum_{n=1}^{200} \frac{1}{n} \approx \ln 200 + \gamma$ (où γ, la constante d'Euler, est à peu près égale à $0,58$ et $\ln 200 \approx 5,30$).

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.21

Pour l'expérience aléatoire qui consiste à jeter *ad infimum* une pièce, définissons les v.a. $X_1, X_2, \ldots$, telles que :

$$X_i = \begin{cases} +1, & \text{si la pièce donne pile au } i\text{-ème lancer,} \\ -1, & \text{si la pièce donne face au } i\text{-ème lancer.} \end{cases}$$

Considérons les v.a. $S_1, S_2, \ldots, S_n$ $(n \geq 1)$, définies par :

$$S_k = X_1 + \cdots + X_k, \quad 1 \leq k \leq n.$$

a- Donner la loi de X_1 et calculer $\mathbb{E}[X_1]$ et $\mathrm{Var}[X_1]$.

b- Calculer $P(S_n = n)$, $\mathbb{E}[S_n]$ et $\mathrm{Var}[S_n]$. Sous quelle condition avons-nous $\mathbb{E}[S_n] < 0$?

c- Calculer $P(S_n \geq 0)$.

d- Calculer la loi de S_n.

e- Si $p = 1/2$, montrer[1] que $P(S_{2k} = 0) \sim 1/\sqrt{\pi k}$ lorsque $k \to \infty$.

Aide : utiliser la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, e^{-n} n^n$ lorsque $n \to \infty$.

[1] La notation $u_n \sim v_n$ signifie que $u_n/v_n \to 1$ lorsque $n \to \infty$, on dit que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont équivalentes au voisinage de l'infini.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.22

Une banque a connu quelques difficultés de trésorerie ; son conseil d'administration décide d'organiser la gestion de manière à ce qu'il y ait 999 chances sur 1000 de toujours pouvoir faire face aux demandes de retrait des déposants (on suppose qu'il n'y a aucun mouvement de panique parmi les déposants ; les habitants de ce pays mènent une vie paisible et ne se préoccupent pas les uns des autres). La banque a 1000 clients et le dépôt de chaque client est de 1000 F. La probabilité qu'un client retire son argent un jour donné est 0,001. Dans ces conditions, combien la banque doit-elle conserver de liquidités journalières pour obéir au principe de gestion qui a été posé ?

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.23

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ de loi : $P(X = k) = (1-\theta)\theta^{k-1}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, et $\theta \in]0, 1[$ et Y une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ que X, indépendante de X et suivant la même loi que X. On considère $Z = X + Y$.

a- Quel est l'ensemble des valeurs prises par Z. Si Z est une variable aléatoire réelle, de quel type est-elle ?

b- Montrer que si $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$, alors $A \cap B \in \mathcal{F}$.

c- Montrer que Z est une variable aléatoire réelle.

d- Calculer la loi de Z.

e- Donner l'espérance mathématique et la variance de Z.

f- Calculer la fonction génératrice g_Z de Z ; retrouver, à l'aide de g_Z, la moyenne et la variance de Z.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.24

Considérons une machine qui au début d'une journée est soit en panne soit en état de marche. Si la machine est en panne au début de la n-ième journée, la probabilité qu'elle soit réparée et opérationnelle au début de la journée suivante est p. De façon analogue, si au début de la n-ième journée la machine est en état de bon fonctionnement, la probabilité qu'elle soit en panne au début de la journée suivante est q.

Notons X_n la variable aléatoire qui représente l'état de la machine au début de la n-ième journée ; X_n prend la valeur 1 si la machine fonctionne et 0 sinon.

a- Exprimer en fonction de p et q les probabilités suivantes : $P(X_{n+1} = 1|X_n = 0)$, $P(X_{n+1} = 0|X_n = 1)$, $P(X_{n+1} = 0|X_n = 0)$ et $P(X_{n+1} = 1|X_n = 1)$.

b- On note $\pi_n = P(X_n = 0)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Donner une expression de π_{n+1} en fonction de p, q et π_n.

c- Supposons que $0 < p, q < 1$. Exprimer π_n en fonction de p, q et π_0 (on calculera π_1, π_2 puis on utilisera la relation : $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = (1 - x^{n+1})/(1 - x)$ lorsque $x \neq 1$).

d- Calculer, pour $0 < p, q < 1$, $\lim_{n\to+\infty} \pi_n$. Comment interpréter ce résultat ?

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.25

A et B jouent aux dés. Une partie se déroule ainsi : A lance le dé, s'il obtient un 1 ou un 2 il gagne la partie, sinon B lance le dé et gagne la partie s'il obtient 3, 4 ou 5, sinon A lance à nouveau le dé, etc.

a- Pour $k \in \mathbb{N}^*$ calculer les probabilités des événements :

- $A_{2k-1} = \{$A gagne au $2k-1$-ième coup$\}$;
- $B_{2k} = \{$B gagne au $2k$-ième coup$\}$.

b- La partie pouvant continuer indéfiniment, calculer les probabilités des événements $G_A = \{$A gagne la partie$\}$ et $G_B = \{$B gagne la partie$\}$.

c- Soit X la variable aléatoire égale au nombre de coups joués. Déterminer la loi de X et son espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.26

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées sur $\{1, 2, \dots, n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

a- Donner la fonction génératrice g_X de X.

b- Calculer $g_X^{(k)}(0)/k!$ (où $g_X^{(k)}(0)$ désigne la dérivée k-ième de la fonction g_X en 0) pour $k \in \mathbb{N}$. Quelle propriété des fonctions génératrices retrouvez-vous ?

c- On suppose que $n = 3$ et on définit $Z = X + Y$.

 (i) Quel est l'ensemble E des valeurs possibles de Z.

 (ii) Donner g_Z.

 (iii) Trouver la loi de Z en utilisant g_Z.

d- Trouver un exemple concret d'expérience illustrant X, Y et Z (n étant à préciser).

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.27

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes (v.a.) de même loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Définisons les v.a. $Z = X_1 + X_2$ et $U = aX_1 + b$ où $a > 0$ et b sont des paramètres réels.

1. Calculer explicitement la loi de la v.a.Z.
2. Donner l'espérance et la variance de Z.
3. Calculer l'espérance et la variance de U.
4. Peut on déterminer $a > 0$ et b tels que Z et U aient la même loi. (Indication On pourra utiliser 2. et 3.).

Exercice A.2.28

Soit Y une v.a. de loi de Poisson de paramètre $\mu > 0$ et soit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ où les X_i sont des v.a. indépendantes et équidistribuées (i.i.d.) et suivent la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Donner en justifiant votre réponse la loi de S_n.
2. Pour quelle valeur du paramètre λ, Y et S_n suivent la même loi ?
3. Comment peut-on donc représenter la loi de Poisson de paramètre μ ?

Exercice A.2.29

Dans une banque, un guichet automatique permet de retirer des billets de 50 Euros. Le nombre de clients utilisant l'appareil dans un intervalle de temps de 5 minutes est une variable aléatoire N telle que :

$$P(N = 0) = 0.3;\ P(N = 1) = 0.1;\ P(N = 2) = 0.4;\ P(N = 3) = 0.2.$$

a- Déterminer l'espérance de la v.a. N.

b- On suppose que les nombre des clients utilisant l'appareil sur deux périodes de 5 minutes ne se chevauchant pas sont indépendants. Soit C la variable aléatoire "nombre de clients utilisant l'appareil en une heure". C peut s'écrire :

$$C = \sum_{i=1}^{12} N_i$$

où N_i désigne le nombre de clients utilisant l'appareil au cours du i-ème intervalle de 5 minutes, lorsque l'on découpe l'heure en 12 intervalles de 5 minutes ; chaque N_i suit la même loi que N.

i- Quelles sont les valeurs possibles de C. Calculer E(C).

ii- Calculer P(C=0).

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.30

Un garage loue des voitures sans chauffeur à la journée. Toute voiture louée lui laisse un bénéfice de 50 euros pour une journée, soit 50% du tarif de location. Il dispose de 2 véhicules, mais chaque véhicule indépendamment de l'autre, peut être immobilisé pour entretien, avec une probabilité $p = 0,1$. On note Y le nombre de voitures disponibles à la location un jour donné. Le nombre X de clients désirant louer une voiture pour une journée donnée est une variable aléatoire de fonction de répartition F donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0, \\ 0,2 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1, \\ 0,5 & \text{si} \quad 1 \leq x < 2, \\ 0,8 & \text{si} \quad 2 \leq x < 3, \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 3. \end{cases}$$

a- Quelle est la loi de Y ? Quelle est sa moyenne ?

b- Quelle est la loi de X ? Quelle est sa moyenne ?

c- Soit Z la variable aléatoire indiquant le nombre de clients qui louent effectivement une voiture dans ce garage un jour donné.

  i- Exprimer Z en fonction de X et Y.

  ii- Calculer la loi de Z (arrondir les probabilités au premier chiffre après la virgule).

  iii- Calculer l'espérance de Z.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

iv- Quel est le bénéfice moyen réalisé par le garage en une journée ? en une semaine (7 jours ouvrables) ?

d- Le garage ne dispose plus que d'une voiture. Quel tarif de location doit-il proposer pour réaliser le même bénéfice moyen journalier ?

Exercice A.2.31

Soit X une variable aléatoire de fonction génératrice g définie par :

$$g(x) = 1/4 + x/4 + x^2/4 + x^3/4.$$

a- Donner la loi de X.

b- Calculer la moyenne et la variance de X.

Exercice A.2.32

Une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ peut-elle avoir une loi uniforme ?

Exercice A.2.33

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$ telles que $P(X = x, Y = y) = 1/9$ pour tout $(x, y) \in \{1, 2, 3\}^2$.

a- X et Y sont-elles indépendantes ?

b- Calculer la loi de $Z = X + Y$.

Exercice A.2.34

Soit T le domaine triangle défini par $T = \{(x, y)/0 \leq x \leq y \leq 1\}$. On choisit un point P au hasard dans T suivant une probabilité uniforme. On note X l'abscisse de P.

a- Représenter en fonction de T l'événement $\{X \leq x\}$ pour $x \in [0, 1]$.

b- En déduire la fonction de répartition de X.

Annexe B
Documents

B.1 Démonstrations

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document B.1.1 Démonstration de la proposition 2.4.1

Espérance, variance, moments Démontrons 1.

$$\mathbb{E}[aX+bY] = \sum_{(x,y)\in E_X\times E_Y} (ax+by)P(X=x\,;\,Y=y)$$

$$= \sum_{x\in E_X}\sum_{y\in E_Y} axP(X=x\,;\,Y=y) + \sum_{x\in E_X}\sum_{y\in E_Y} byP(X=x\,;\,Y=y)$$

$$= a\sum_{x\in E_X} xP(X=x\,;\,Y\in E_Y) + b\sum_{y\in E_Y} yP(X\in E_X\,;\,Y=y)$$

$$= a\sum_{x\in E_X} xP(X=x) + b\sum_{y\in E_Y} yP(Y=y) = a\mathbb{E}[X]+b\mathbb{E}[Y]$$

Démontrons 2. Si $X\geq 0$, c'est-à-dire si $E_X\subset\mathbb{R}^+$ alors il est évident que

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x\in E_X} xP(X=x)\geq 0.$$

Maintenant si $X\leq Y$ alors $Z=Y-X$ est une v.a. positive, ce qui entraîne $\mathbb{E}[Z]\geq 0$, or d'après 1, on a

$$\mathbb{E}[Z]=\mathbb{E}[Y-X]=\mathbb{E}[Y]-\mathbb{E}[X]\geq 0.$$

Document B.1.2 Démonstration du théorème 2.4.1

Espérance, variance, moments Notons $Z = XY$ alors $E_Z = \{z = xy\ ;\ (x, y) \in E_X \times E_Y\}$ donc

$$\{Z = z\} = \bigcup_{(x,y)\in E_X\times E_Y\ ;\ xy=z} \{X = x\} \cap \{Y = y\} \in \mathcal{F},$$

donc Z est une v.a. discrète. De plus

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z] = \sum_{z\in E_Z} zP(Z = z) &= \sum_{(x,y)\in E_X\times E_Y} xyP(X = x\ ;\ Y = y) \\
&= \sum_{x\in E_X}\sum_{y\in E_Y} xyP(X = x)P(Y = y) \\
&= \left(\sum_{x\in E_X} xP(X = x)\right)\left(\sum_{y\in E_Y} yP(X = y)\right) = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].
\end{aligned}$$

Document B.1.3 Démonstration de la proposition 2.4.2

Espérance, variance, moments D'après la proposition II.1.2 $f(X)$ est une v.a.r. discrète. Si X admet pour loi $\{p(x); x \in E\}$, on a alors :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[f(X)\right] &= \sum_{y \in F} y P\left(f(X) = y\right) \\
&= \sum_{y \in F} y \sum_{x : f(x) = y} P\left(X = x\right) \\
&= \sum_{y \in F} \sum_{x : f(x) = y} f(x) P\left(X = x\right) \\
& \quad \sum_{x \in E} f(x) P\left(X = x\right),
\end{aligned}
$$

où $F = f(E)$.

Réciproquement, si $y \in E$ et $f(x) = 1_{\{y\}}(x)$, on a : $\mathbb{E}[f(X)] = P(X = y) = p(y)$. Donc si II.2.1 est vraie pour toute application f, la loi de X est donnée par $\{p(x); x \in E\}$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

B.2 Complément d'intégration

Document B.2.1 Intégrale de Riemann-Stieltjès

Espérance, variance, moments Dans ce paragraphe nous allons présenter une généralisation de l'intégrale de Riemann (vue en MT22) qui nous permettra de traiter d'une manière homogène les v.a. discrètes et absolument continues du chapitre suivant.

Soit g une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. On note

$$\mathcal{P}_n(a,b) = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$$

une partition de $[a,b]$ et

$$\tau_n(a,b) = \max\{x_i - x_{i-1} \ ; \ 1 \leq i \leq n\}$$

le plus grand intervalle de la partition $\mathcal{P}_n(a,b)$.

De plus on note pour $1 \leq i \leq n$

$$m_i = \inf\{g(x) \ ; \ x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

et

$$M_i = \sup\{g(x) \ ; \ x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Soit F une fonction croissante sur $[a,b]$. On définit

$$\overline{S}_n = \sum_{i=1}^{n} M_i(F(x_i) - F(x_{i-1}))$$

et

$$\underline{S}_n = \sum_{i=1}^{n} m_i(F(x_i) - F(x_{i-1})).$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Définition B.2.1. *Si $\overline{S}_n$ et $\underline{S}_n$ admettent une même limite lorsque $\tau_n(a,b)$ tend vers 0, alors cette limite définit l'intégrale de Riemann-Stieltjès de g par rapport à F sur $[a,b]$. On la note*

$$\int_{[a,b]} g(x)dF(x) \text{ ou encore } \int_a^b gdF.$$

Proposition B.2.1 (non démontrée). *Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et g_1 et g_2 deux fonctions définies sur $[a,b]$ admettant une intégrale de Riemann-Stieltjès par rapport à deux fonctions F_1 et F_2 croissantes sur $[a,b]$. Alors*

- *[i]* $\int_a^b (\alpha g_1 + \beta g_2)dF_1 = \alpha \int_a^b g_1 dF_1 + \beta \int_a^b g_2 dF_1$ *;*
- *[ii]* $\int_a^b g_1 d(\alpha F_1 + \beta F_2) = \alpha \int_a^b g_1 dF_1 + \beta \int_a^b g_1 dF_2$ *;*
- *[iii] si $a < c < b$ alors*

$$\int_a^b g_1 dF_1 = \int_a^c g_1 dF_1 + \int_c^b g_1 dF_1 \ ;$$

- *[iv] si $g_1 \le g_2$ sur $[a,b]$ alors*

$$\int_a^b g_1 dF_1 \le \int_a^b g_2 dF_1.$$

Définition B.2.2. *soient g définie sur $\mathbb{R}$ et F une fonction croissante définie sur $\mathbb{R}$. On appelle intégrale de Riemann-Stieltjès généralisée de g par rapport à F, lorsqu'elle existe, la quantité*

$$\int_{\mathbb{R}} gdF = \lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to+\infty} \int_a^b gdF.$$

Nous l'avons déjà dit, notre intention est d'utiliser de telles intégrales avec des fonctions de répartition F de variables aléatoires discrètes ou absolument continues.

Exemple. Soit F la fonction de répartition associée à une variable aléatoire prenant la valeur c avec probabilité 1. Une telle variable aléatoire a une loi dite de Dirac, notée δ_c. Alors il est clair que

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < c, \\ 1 & \text{si} \quad x \geq c. \end{cases}$$

Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$; calculons $\int_a^b gdF$.

Si $c \notin [a,b]$ alors pour toute partition $\mathcal{P}_n(a,b)$ on a : $F(x_i) - F(x_{i-1}+) = 0$ pour $1 \leq i \leq n$, donc $\overline{S}_n = \underline{S}_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. Par passage à la limite on a donc

$$\int_a^b gdF = 0.$$

Si $c \in [a,b]$, d'après la proposition (B.2.1) [iii] et le résultat ci-dessus on a

$$\int_a^b gdF = \int_a^c gdF \quad \text{car} \quad \int_c^d gdF = 0.$$

Soit $\mathcal{P}_n(a,b) = \{x_j = a + (c-a)j/n \; ; \; 0 \leq j \leq n\}$, comme F est constante en dehors de c on a

$$\overline{S}_n = M_n(F(c) - F(x_{n-1})) = M_n$$

et

$$\underline{S}_n = m_n(F(c) - F(x_{n-1})) = m_n.$$

Or $\lim_{\tau_n(a,b)\to 0} m_n = \lim_{x_{n-1}\to c} \inf\{g(x) \; ; \; x \in [x_{n-1}, c]\} = g(c)$ car g est continue, de même on a $\lim_{\tau_n(a,b)\to 0} M_n = g(c)$, d'où

$$\int_a^b gdF = g(c).$$

En fait il est facile de voir que pour une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $E_X = \{x_j \in \mathbb{R} \; ; \; j \in J \subset \mathbb{N}\}$ on a

$$F_X(x) = \sum_{j \in J} p_j F(x - x_j), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

où pour tout $j \in J$ $p_j = P_X(x_j)$.

D'après l'exemple précédent et la proposition (B.2.1) [ii] on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g dF_X = \sum_{j \in J} g(x_j) p_j.$$

Par exemple, le moment d'ordre r ($r \in \mathbb{N}$) de X est donné par

$$\mathbb{E}[X^r] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r dF(x) = \sum_{j \in J} x_j^r p_j.$$

Exemple. Soit F une fonction telle qu'il existe une fonction positive f avec

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u) du.$$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$ et $F(b) < +\infty$. Soit g une fonction continue définie sur $[a, b]$ et $\mathcal{P}_n(a, b)$ une partition de $[a, b]$, calculons $\int_a^b g dF$.

$$\overline{S}_n = \sum_{i=1}^{n} M_i (F(x_i) - F(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} M_i f(x) dx$$

et

$$\underline{S}_n = \sum_{i=1}^{n} m_i (F(x_i) - F(x_{i=1})) = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} m_i f(x) dx.$$

Par conséquent

$$\underline{S}_n \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x) f(x) dx = \int_a^b g(x) f(x) dx \leq \overline{S}_n.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Donc lorsque cette intégrale de Riemann-Stieltjès existe on a

$$\int_{]a,b]} g(x)dF(x) = \int_a^b g(x)f(x)dx.$$

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

Solution de l'exercice A.1.1

$$\{X = 7\} = \{(6,1),(1,6),(5,2),(2,5),(4,3),(3,4)\} \Rightarrow P(X = 7) = 6/36.$$
$$\{X \geq 10\} = \{(6,4),(4,6),(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\} \Rightarrow P(X \geq 10) = 6/36.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.2

- $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$;
- La tribu est $\mathcal{P}(\Omega)$, la famille des sous-ensembles de Ω ;
- P est l'équiprobabilité.

Comme X, Y et Z sont des applications de Ω dans $\mathbb{R}$, que Ω est un ensemble fini, $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ et $Z(\Omega)$ sont des ensembles finis. De plus, si $x \in X(\Omega)$

$$\{X = x\} = \{(w_1, w_2) \in \Omega; X(w_1, w_2) = x\} \in \mathcal{P}(\Omega),$$

car c'est à l'évidence un sous-ensemble de Ω. Ceci vaut aussi pour Y et Z. Donc X, Y et Z sont des v.a. discrètes.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.3

a- $X(\Omega) = \Omega$ (fini) ; $\{X = k\} = \{k\} \in \mathcal{F}_1$ si $k \in \Omega$ mais pas à $\mathcal{F}_2$. Donc X est une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{F}_1)$ mais pas sur $(\Omega, \mathcal{F}_2)$.

b- $Y(\Omega) = \{0, 1\}$; $\{Y = 0\} = \{2, 4, 6\} \in \mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$, de même $\{Y = 1\} = \{1, 3, 5\} \in \mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$. Donc Y est une v.a. discrète sur $(\Omega, \mathcal{F}_1)$ et $(\Omega, \mathcal{F}_2)$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.4

Exercice A.1.2.

$x \in X(\Omega)$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$6/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$1/36$

$y \in Y(\Omega)$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$P(Y=y)$	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$6/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$1/36$

$z \in Z(\Omega)$	0	1	4	9	16	25
$P(Y=y)$	$6/36$	$10/36$	$8/36$	$6/36$	$4/36$	$2/36$

Exercice A.1.3.

$x \in X(\Omega)$	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

$y \in Y(\Omega)$	0	1
$P(Y=y)$	$1/2$	$1/2$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.5

Non, par exemple $P(X = 12; Y = 1) = 0$ **or** $P(X = 12) = 1/36$ **et** $P(Y = 1) = 5/36$ **donc** $P(X = 12; Y = 1) \neq P(X = 12) \times P(Y = 1)$.

Retour à l'exercice ▲

Il suffit d'appliquer :

$$F(x) = \sum_{y \leq x} P(X = y).$$

Par exemple, pour Z de l'exercice A.1.2 on a :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0, \\ 1/6 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1, \\ 4/9 & \text{si} \quad 1 \leq x < 4, \\ 2/3 & \text{si} \quad 4 \leq x < 9, \\ 5/6 & \text{si} \quad 9 \leq x < 16, \\ 17/18 & \text{si} \quad 16 \leq x < 25, \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 25. \end{cases}$$

Retour à l'exercice ▲

a- F est croissante, de limite nulle en $-\infty$, de limite égale à 1 en $+\infty$ et continue à droite, il s'agit donc bien d'une f.d.r.

b-

$x \in X(\Omega)$	-1	1	7	11
$P(X = x)$	$0,29$	$0,08$	$0,32$	$0,31$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.8

a- Soit n le nombre d'étudiants et p la probabilité qu'un étudiant réussisse, alors $X = X_1 + \ldots + X_n$ où X_i vaut 1 si le i-ème étudiant réussi et 0 sinon. Si les X_i sont indépendantes (pas toujours vrai en pratique), X suit une loi $B(n;p)$.

b- La v.a. donnant le nombre de grilles de loto jouées pour gagner pour la première fois suit une loi géométrique de paramètre $1-p$ où $p = 0.9813625$ est la probabilité de perdre à ce jeux (faites le calcul !).
Remarque : il faut en moyenne jouer 53 grilles avant de gagner pour la première fois.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.9

Il s'agit d'une loi $H(8;3;2)$. La probabilité cherchée est donc :

$$\frac{C_3^1 C_5^1}{C_8^2} = 15/28.$$

Retour à l'exercice ▲

Allons-y pour l'espérance mathématique d'une géométrique $X \sim G(p)$ pour $p \in]0,1[$:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1}p = -p\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^k p\right)' = -pf'(1-p)$$

où $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = 1/(1-x)$ si $|x| < 1$. Comme $f'(x) = -1/(1-x)^2$ on a $\mathbb{E}(X) = 1/p$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.11

$$\mathbb{E}\left[(1+X)^{-1}\right] = \sum_{k=0}^{+\infty}(1+k)^{-1}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} - 1\right] = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(e^{\lambda}-1\right) = (1-e^{-\lambda})/\lambda.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.12

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \mathbb{E}(X^2 - 2\mathbb{E}(X)X + (\mathbb{E}(X))^2)$$
$$= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(X^2) - 2(\mathbb{E}(X))^2.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.13

a- $\mathbb{E}(X) = 0 \times 0,1 + 1 \times 0,5 + 2 \times 0,3 + 3 \times 0,1 = 1,4\,;$
$\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \times 0,1 + 1^2 \times 0,5 + 2^2 \times 0,3 + 3^2 \times 0,1 = 2,6\,;$
$\mathbf{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 0.64.$

b- Y étant la somme de 6 v.a. i.i.d. on a : $\mathbb{E}(Y) = 6\mathbb{E}(X) = 8,4$ et $\mathbf{Var}(Y) = 6\mathbf{Var}(X) = 3.84.$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.14

Les calculs qui suivent ne sont pas justifiés mathématiquement.

a- Cf. cours ;

b- On a :

$$g_X''(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)u^{k-2}p_k \xrightarrow{u\to 1}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)p_k = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 p_k - \sum_{k=0}^{+\infty} k p_k = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X) = g_X''(1).$$

Par conséquent, $\text{Var}(X) = g_X''(1) + \mathbb{E}(X) - (\mathbb{E}(X))^2 = g_X''(1) + g_X'(1) - (g_X'(1))^2$.

Retour à l'exercice ▲

Juste un petit exemple : $X \sim G(p)$ **où** $p \in]0,1[$.

$$g_X(u) = \mathbb{E}(u^X) = \sum_{k=1}^{+\infty} u^k p(1-p)^{k-1} = pu \sum_{k=1}^{+\infty} (u(1-p))^{k-1}$$

$$= pu \sum_{k=0}^{+\infty} (u(1-p))^k = \frac{pu}{1-(1-p)u},$$

si $|u| < 1/(1-p)$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.16

- Fonctions génératrices : $g_X(u) = (1-p+pu)^n$ et $g_Y(u) = (1-p+pu)^m$ comme de plus X et Y sont indépendantes, d'après le cours on a $g_{X+Y}(u) = g_X(u)g_Y(u) = (1-p+pu)^{n+m}$, ce qui est la fonction génératrice d'une $B(n+m;p$.
- Convolution : $X+Y \in \{0,1,\ldots,n+m\}$, soit $k \in \{0,1,\ldots,n+m\}$,

$$P(X+Y=k) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(X=k-j)P(Y=j)$$

avec

$$\left\{\begin{array}{l} 0 \le j \le m \\ 0 \le k-j \le n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \le j \le m \\ k-n \le j \le k \end{array}\right. \Leftrightarrow \max(0,k-n) \le j \le \min(m,k).$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} P(X+Y=k) &= \sum_{j=\max(0,k-n)}^{\min(m,k)} C_n^{k-j} p^{k-j}(1-p)^{n-k+j} C_m^j p^j (1-p)^{m-j} \\ &= p^k(1-p)^{n+m-k} \sum_{j=\max(0,k-n)}^{\min(m,k)} C_n^{k-j} C_m^j. \end{aligned}$$

Un petit peu de combinatoire vous donnera :

$$\sum_{j=\max(0,k-n)}^{\min(m,k)} C_n^{k-j} C_m^j = C_{n+m}^k.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.17

$$P(|X-1|>2) = \ldots = 1 - P(X \leq 3) = 1 - e^{-1}(1+1+1/2+1/6) \approx 0,019.$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev, comme $\mathbb{E}(X) = 1$ on a :

$$P(|X-1|>2) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{4} = 0,25.$$

Ceci nous montre que cette inégalité peut être bien imprécise...

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.2.13

a- On a $p_1 = P(T = 1) = P(X_1 = 1) = p$ et $p_2 = P(T = 2)$ or $\{T = 2\} \Rightarrow \{X_1 + X_2 = 1\}$ or $X_1 + X_2$ est paire donc $\{T = 2\} = \emptyset$ soit $p_2 = 0$. Soi t $t \geq 3$, on appelle trajectoires de S_n, les évolutions possibles de S_n en fonction de n (voir FIG. 1).

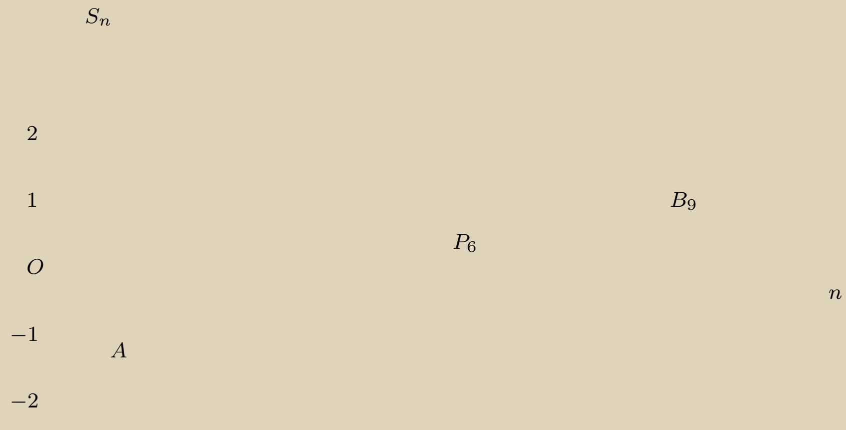


FIG. 1.

Sur la figure ci-dessus on a : $\{T = 9\} = \min\{n \geq 1; S_n = 1\}$. Comme $t \geq 3$, pour que $\{T = t\}$ se réalise on doit nécessairement avoir $\{X_1 = -1\}$. Do nc toute trajectoire réalisant $\{T = t\}$ passe par A. De plus, ces trajectoi res atteignent nécessairement l'axe (On) puisqu'elles doivent aller jusqu'en B_t (le premier point de la trajectoire d'ordonnée $+1$). Soit P_k le pre mier point de l'axe (On) atteint par la trajectoire OB_t. Les abscisses poss ibles pour P_k sont $k = 2, 3, \ldots, t-1$. Donc toute trajectoire OB_t correspon dant à $\{T = t\}$ peut être décrite ainsi :

$$\{OB_t\} = \{OA; AP_2; P_2B_t\} \cup \{OA; AP_3; P_3B_t\} \cup \ldots \cup \{OA; AP_{t-1}; P_{t-1}B_t\}.$$

Il s'agit clairement d'une réunion disjointe d'événements. D'autre part, p our $k \in \{2, 3, \dots, t-1\}$ les événements $\{OA\}$, $\{AP_k\}$ et $\{P_k B_t\}$ sont indépendants car ils font respectivement intervenir les v.a. $\{X_1\}$, $\{X_2, \dots, X_k\}$ et $\{X_{k+1}, \dots, X_t\}$ alors que les X_i sont indépendantes. Nous avons donc :

$$p_t = P(T = t) = P(OB_t) = \sum_{k=2}^{t-1} P(OA)P(AP_k)P(P_k B_t).$$

L'événement $\{OA\}$ est égal à $\{X_1 = -1\}$ donc $P(OA) = q$. L'évén ement $\{AP_k\}$, si l'on déplace l'origine du repère en A, est équivale nt à l'événement $\{OB_{k-1}\}$, soit encore $\{T = k-1\}$ dont la probabili té est p_{k-1}. Enfin, l'événement $\{P_k B_t\}$, si l'on déplace l'ori gine du repère en P_k, est équivalent à l'événement $\{OB_{t-k}\}$, soit encore $\{T = t-k\}$ dont la probabilité est p_{t-k}. Il vient donc

$$p_t = \sum_{k=2}^{t-1} q p_{k-1} p_{t-k} = q(p_1 p_{t-2} + p_2 p_{t-3} + \cdots + p_{t-2} p_1). \tag{B.2.1}$$

b- Par définition on a : $G_T(z) = \mathbb{E}(z^T) = \sum_{t=1}^{+\infty} z^t p_t$, d onc

$$G_T(z) = zp + \sum_{t=3}^{+\infty} z^t p_t = zp + \sum_{t=3}^{+\infty} z^t \sum_{k=2}^{t-1} q p_{k-1} p_{t-k}. \tag{B.2.2}$$

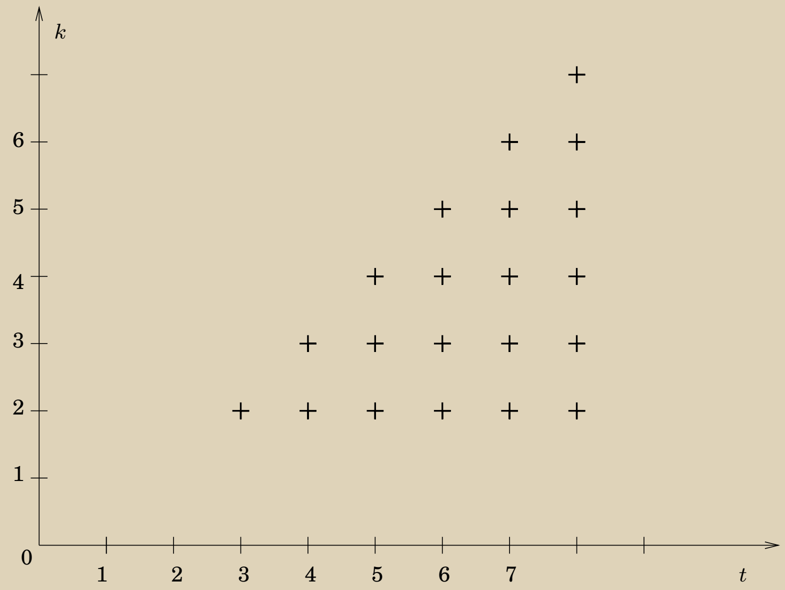


FIG. 2.

En s'aidant de la FIG. 2 on peut voir que :

$$\sum_{t=3}^{+\infty} \sum_{k=2}^{t-1} = \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{t=k+1}^{+\infty} . \tag{B.2.3}$$

D'après (B.2.2) et (B.2.3) on a :

$$\begin{aligned} G_T(z) &= zp + qz \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{t=k+1}^{+\infty} z^{k-1} p_{k-1} z^{t-k} p_{t-k} \\ &= zp + qz \sum_{k'=1}^{+\infty} \sum_{t'=1}^{+\infty} z^{k'} p_{k'} z^{t'} p_{t'} = zp + zq(G_T(z))^2. \end{aligned}$$

Par conséquent $G_T(z)$ est solution d'une équation du second degré dont l e discriminant est $\Delta = 1 - 4pqz^2 \geq 0$ pour $z \in [-1, 1]$. On a donc $G_T(z) = (1 \pm \sqrt{1 - 4pqz^2})/(2qz)$. Comme $G_T(0) = p$ il est évident que la bonne s olution est donnée par

$$G_T(z) = \frac{1}{2qz}(1 - \sqrt{1 - 4pqz^2}).$$

Utilisons le fait que :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha - 1)\frac{x^2}{2!} + \alpha(\alpha-1)(alpha - 2)\frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} C_\alpha^k x^k,$$

pour calculer $G_T(z)$. On a donc

$$G_T(z) = \frac{1}{2qz}\left(1 - \sum_{k=0}^{+\infty} C_{1/2}^k (4pqz^2)^k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2q} C_{1/2}^k (4pq)^k z^{2k-1}.$$

Il vient donc pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$p_{2k} = 0 \quad \text{et} \quad p_{2k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{2q} C_{1/2}^k (4pq)^k.$$

La probabilité $p_{2k} = 0$ correspond à l'événement $\{2k = \min\{n \geq 1; S_n = 1\}\}$ or $S_{2k} \in 2\mathbb{Z}$ pour tout k (il suffit de tracer toutes les traj ectoires pour s'apercevoir qu'aucune ne touche la droite $S_n = 1$ en une absciss e paire ; cf. FIG.

3).

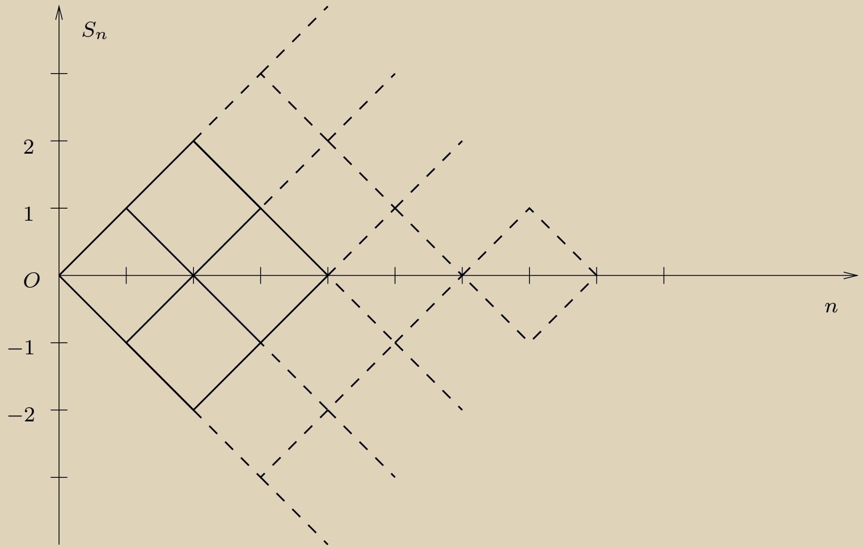


FIG. 3.

c-

$$G_T(1) = \frac{1}{2q}(1 - \sqrt{1-4pq}) = \frac{1}{2q}(1 - \sqrt{1-4q(1-q)}) = \frac{1}{2q}(1-\sqrt{1-4q+4q^2})$$

$$= \frac{1}{2q}(1-|1-2q|)) = \frac{1}{2q}(1-|p-q|)) = \begin{cases} p/q & \text{si} \quad p < q, \\ 1 & \text{si} \quad p \geq q. \end{cases}$$

Ici nous n'avons pas toujours $G_T(1) = 1$! Une interprétation possible du ré sultat est que lorsque $p < q$, $t = +\infty$ est une valeur possible de T et alor s $P(T = +\infty) = 1 - p/q > 0$.

d- Pour $p \geq q$, G_T est bien une fonction génératrice et d'après le cours on sait que $\mathbb{E}(T) = G_T'(1)$. Or

$$G_T'(z) = \frac{2qz(1-4pqz^2)^{-1/2}4pqz - (1-\sqrt{1-4pqz^2})2q}{4q^2z^2},$$

d'où il vient :

$$G'_T(1) = 2p(1-4pq)^{-1/2} - \frac{1-(1-4pq)^{1/2}}{2q} = \frac{2p}{|p-q|} - \frac{|p-q|}{2q},$$

soit

$$\mathbb{E}(T) = \begin{cases} (p-q)^{-1} & \text{si} \quad p > q, \\ +\infty & \text{si} \quad p = q. \end{cases}$$

e- Si S_n est l'argent gagné ou perdu (gain) par le joueur au cours d e n parties alors T est le temps qu'il faut au joueur pour voir son gain dev enir positif. Le résultat du **c** nous indique que la probabilité que le gain du joueur reste toujours négatif est non nulle, lorsque $p < q$. Le résul tat du **d** nous indique que si le jeu est équitable, il faudra en moyenne un temps infini pour que le joueur se "refasse", et donc, cela nécessitera a ussi que le joueur dispose d'une fortune initiale infinie.
Pour la culture (probabiliste), nous venons d'étudier des marches aléatoires non symétriques.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.2.23

a- $Z \in \{2, 3, \ldots\}$ donc à valeurs dans un ensemble dénombrable donc discrète.

b- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ or $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont dans $\mathcal{F}$ puisque A et B y sont. Donc comme $\mathcal{F}$ est stable par réunion dénombrable $\overline{A} \cup \overline{B}$ est dans $\mathcal{F}$ donc son complémentaire aussi, c'est-à-dire $A \cap B$.

c- Soit $k \in \{2, 3, \ldots\}$ il suffit de montrer que $\{Z = k\}$ est dans $\mathcal{F}$. Or $\{Z = k\} = \{X + Y = k\} = \cup_{n=1}^{k-1}\{X = n\} \cap \{Y = k-n\}$. Maintenant, pour tout n $\{X = n\} \cap \{Y = k-n\}$ est dans $\mathcal{F}$ puisque X et Y sont des v.a.r. discrètes et d'après le **b**, donc la réunion finie est aussi dans $\mathcal{F}$ ce qui finit la preuve.

d- Nous venons de voir que pour $k \in \{2, 3, \ldots\}$:

$$\{Z = k\} = \{X + Y = k\} = \cup_{n=1}^{k-1}\{X = n\} \cap \{Y = k - n\}.$$

Donc

$$P(Z = k) = \sum_{n=1}^{k-1} P(X = n)P(Y = k - n)$$

$$= \sum_{n=1}^{k-1} \theta^2(1-\theta)^{n-1}(1-\theta)^{k-n-1} = \theta^2 \sum_{n=1}^{k-1}(1-\theta)^{k-2} = (k-1)\theta^2(1-\theta)^{k-2}.$$

e- $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 2/\theta$; $\text{Var}(Z) = \text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) = 2(1-\theta)/\theta^2$.

f- Puisque X et Y sont indépendantes on a, pour $-1 < u < 1$:

$$g_Z(u) = g_X(u)g_Y(u) = \left(\frac{\theta u}{1-(1-\theta)u}\right)^2$$

g- On rappelle que $\mathbb{E}(Z) = g_Z'(1)$. Or

$$g_Z'(u) = \frac{2\theta^2 u(1-(1-\theta)(u-u^2))}{(1-(1-\theta)u)^3}$$

ce qui conduit à : $g_Z'(1) = 2/\theta$. Pour la variance il suffit d'utiliser la relation $\text{Var}(Z) = g_Z''(1) + g_Z'(1) - (g_Z'(1))^2$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.2.25

(a) $A_{2k-1} = \bar{A}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \ldots \bar{B}_{2k-2} \cap A_{2k-1}$ alors, d'après la formule des probabilités composées :

$$P(A_{2k-1}) =$$

$$P(A_{2k-1}|\bar{A}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \ldots \cap \bar{B}_{2k-2}) \times P(\bar{B}_{2k-2}|\bar{A}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_{2k-3}) \times \cdots \times P(\bar{B}_2|\bar{A}_1) \times P(\bar{A}_1)$$

$$= \frac{2}{6} \times \left(\frac{4}{6}\right)^{k-1} \times \left(\frac{3}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{3^k}.$$

Remarque : les événements $A_1, B_2, A_3, \ldots$ ne sont pas indépendants ! Par exemple si A_1 est réalisé, B_2 n'est pas libre de se réalisé.
De même, on a :

$$P(B_{2k}) =$$

$$P(B_{2k}|\bar{A}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_{2k-1}) \times P(\bar{A}_{2k-1}|\bar{A}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \ldots \cap \bar{B}_{2k-2}) \times \cdots \times P(\bar{B}_2|\bar{A}_1) \times P(\bar{A}_1)$$

$$= \frac{3}{6} \times \left(\frac{4}{6}\right)^{k} \times \left(\frac{3}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{3^k}.$$

(b) On a :

$$G_A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_{2k-1}$$

or les $(A_{2k-1})_{k=1,2,\ldots}$ sont 2 à 2 incompatibles, donc :

$$P(G_A) = P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_{2k-1}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_{2k-1}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{k-1}} = \frac{1}{3}\frac{1}{(1-1/3)} = \frac{1}{2}.$$

De même :

$$P(G_B) = P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_{2k}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2}.$$

On a donc $P(G_A) + P(G_B) = 1$ ce qui n'est pas évident car il est possible, a priori, qu'une partie dure indéfiniment. Le résultat ci-dessus nous indique que la probabilité que cette situation ait lieu est nulle.

(c) X est le nombre de coups joués dans une partie. Donc $X \in \mathbb{N}^*$ et on a pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\{X = n\} = \begin{cases} A_n & \text{si} \quad n = 2k-1, \\ B_n & \text{si} \quad n = 2k. \end{cases}$$

Il vient :

$$P(X = n) = 1/3^k \quad \text{si} \quad n = 2k-1 \quad \text{ou} \quad n = 2k,$$

Pour les puristes, on peut écrire :

$$P(X = n) = \frac{1}{3^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}},$$

où $[\cdot]$ désigne la partie entière. Maintenant :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} (2k-1)(1/3)^k + \sum_{k=1}^{+\infty} 2k(1/3)^k$$

$$= 4/3 \sum_{k=1}^{+\infty} k(1/3)^{k-1} - \sum_{k=1}^{+\infty} (1/3)^k = 4/3 \left(\sum_{k=1}^{+\infty} x^k \right)'_{|x=1/3} - 1/2 = 4/3 \left(1/(1-x)\right)'_{|x=1/3} - 1/2$$

$$= (4/3) \times (1 - 1/3)^2 - 1/2 = 5/2.$$

Retour à l'exercice ▲

(a) $g_X(u) = \mathbb{E}(u^X) = \dfrac{u + u^2 + \ldots + u^n}{n}$.

(b) Pour $1 \le k \le n$ on a :

$$g_X^{(k)}(0) = k!/n,$$

donc $g_X^{(k)}(0)/k! = 1/n = P(X = k)$, ce qui est une propriété (vue en cours !) des fonctions génératrices.

(c) (i) $Z \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$;

(ii) $g_Z = g_X \times g_Y$ car X et Y sont indépendantes, donc :

$$g_Z(u) = \frac{1}{9}(u + u^2 + u^3)^2 = \frac{1}{9}(u^2 + 2u^3 + 3u^4 + 2u^5 + u^6).$$

(iii) En utilisant la propriété $g_X^{(k)}(0)/k! = P(X = k)$ pour $k = 2, 3, \ldots, 6$, on obtient :

$$P(Z = 2) = \frac{2/9}{2!} = 1/9\ ;\ P(Z = 3) = \frac{2 \times 3 \times 2/9}{3!} = 2/9 \ldots$$

Finalement on a :

k	2	3	4	5	6
$P(Z = k)$	1/9	2/9	3/9	2/9	1/9

(d) On lance deux dés non pipés et on note X et Y les résultats obtenus, alors la somme Z est bien la somme de deux v.a. indépendantes de loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Retour à l'exercice ▲