Vous avez droit à une calculatrice, un dictionnaire, ainsi qu'une feuille A4 écrite recto-verso et à la main.

Soignez la présentation de vos copies, votre note en dépendra. Précisez les unités utilisées pour vos résultats.

I. « GRILLER » SON AUTONOMIE POUR « GRILLER » LES AUTRES ? (30 MIN)

En voiture et arrêté à un feu, on peut se demander s'il est préférable, du point de vue énergétique, d'accélérer fortement dès que le feu passe au vert, ou bien accélérer moins fort mais plus longtemps. Cet exercice tente de répondre à cette question existentielle.

On considère ainsi une voiture (de masse M) initialement à l'arrêt. Sa vitesse maximale est 50 km/h (vitesse de déplacement en ville). Les déplacements se font sur une route à pente nulle. On veut calculer l'énergie (mécanique) nécessaire pour parcourir une distance D=138,9m.

Pour cela, on considère 2 configurations d'utilisation de la voiture :

- Configuration 1 (accélération faible) : parcours de D en accélération constante, en 20 secondes ;
- Configuration 2 (accélération forte) : d'abord accélération constante, quatre fois plus forte que celle de la configuration 1, puis vitesse maximale et constante jusqu'à parcourir la distance D.

On utilisera les valeurs suivantes : M=1 t, C_r=0,01, ρ=1,2 kg/m³, S.C_x=4x0,9 m², g=9,81 m/s².

Configuration 1

1.1 Quelle est la valeur de l'accélération a_1 prise par la voiture ?

a_1=(50/3,6)/20=**0,69 m/s²**

1.2 Rappeler le Principe Fondamental de la Dynamique et en déduire l'expression de la force d'entraînement F_{ent} devant s'appliquer sur la voiture. *Pour cela, on écrira les expressions des forces s'opposant au mouvement et de celle d'accélération (F_{acc}).*

$Facc=M*a_1=F_{ent}-F_{frot}$ avec $F_{frot}=F_R+F_G+F_A=C_r*M*g*cos(alp)+M*g*sin(alp)+0,5*rho*S*C_x*v^2$

1.3 Pour la vitesse maximale, calculer les valeurs des forces précédentes.

v_{max}=13,888m/s, alp=0

F_R=98,1 N ; F_G=0 N ; F_A=416,67 N ; F_{acc}=694,44 N ; F_{ent}=1209,21 N

1.4 En utilisant le fait que v(t)=a_1.t, donner l'expression de la puissance mécanique en fonction du temps P_1(t).

$F_{ent}=M*a_1+C_r*M*g+0,5*rho*S*C_x*v^2$ avec $v=(a_1*t)$

$F_{ent}=M*a_1+C_r*M*g+0,5x*rho*S*C_x*(a_1*t)^2$

$P_1=F_{ent}*v=F_{ent}* a_1*t=M*a_1^2*t+C_r*M*g*a_1*t+0,5*rho*S*C_x*(a_1*t)^3$

1.5 En déduire l'expression E_1(t) et la valeur de l'énergie mécanique pour t=t_D.

Il faut intégrer le résultat précédent entre t=0 et t=t_D

$E_1(0-t)=Int(P_1,0,t_D)=M*a_1^2*t^2/2+C_r*M*g*a_1*t^2/2+0,5*rho*S*C_x*a_1^3*t^4/4$

$E_1(0-t_D)$=**139010 J**

Configuration 2

L'accélération a_2 pour cette nouvelle configuration vaut $a_2 = 4 \times a_1$.

1.6 Calculer :

- la distance et le temps correspondants à la phase d'accélération (phase 2.1) ;

$t=v_{max}/a_2=$**5 s**

$d=0{,}5*a_2*t^2=$**34,72 m**

- la distance et le temps restants pour parcourir la distance D à vitesse constante (phase 2.2).

distance restante : 138,9-34,72=**104,18 m**

temps nécessaire : $t=104{,}18/v_{max}=$**7,5 s**

1.7 Évaluer :

- l'énergie mécanique nécessaire à l'accélération de la phase 2.1 ;

On peut reprendre la même formule qu'en 1.5, mais en prenant la nouvelle durée et la nouvelle valeur d'accélération.

$E_{21}(0\text{-}t=5s)=M*a_2^2*t^2/2+C_r*M*g*a_2*t^2/2+0{,}5*rho*S*C_x*a_2^3*t^4/4=$**107090 J = 29,75 Wh**

- l'énergie mécanique nécessaire pour la phase 2.2.

(pas d'accélération)

$E_{22}(t=5s\text{-}12{,}5s)=F_{entvmax}*v_{max}*\delta t=(C_r*M*g+0{,}5x*rho*S*C_x*v_{max}^2)*v_{max}*(12{,}5-5)=$**53627 J = 14,90 Wh** (7150 W -> 514 Nm)

1.8 En déduire l'énergie totale E_2 utilisée par la voiture pour parcourir la distance D, selon la configuration 2. Conclure (répondre à la question existentielle initiale).

$E_2=E_{21}+E_{22}=$**160718 J**

On trouve $E_2>E_1$. Il est donc préférable de ne pas accélérer fortement, afin de limiter la dépense énergétique de cette phase de démarrage (réduction des pertes par frottements aérodynamiques).

II. Pour la peche aux points, « Le moulinet electrique » ! (30 min)

Pour la pêche aux gros, il peut être utile de disposer d'un moulinet à assistance électrique pour assister le pêcheur lors de la remontée du poisson. Les fils utilisés dans ce contexte sont en fait des **tresses** de plusieurs fils pouvant supporter **une tension de l'ordre de plusieurs milliers de newtons**. Il est admis que les rayons minimal et maximal de la bobine sont respectivement de 1 cm et de 4,05 cm.

Paramètres du moteur à courant continu

- Tension nominale U_{nom} = 24V ;
- Vitesse maximale N_{max} = 3000 tr/min ;
- Puissance P_{nom} = 360 W ;
- Rendement moteur η_{mot} = 0.8.

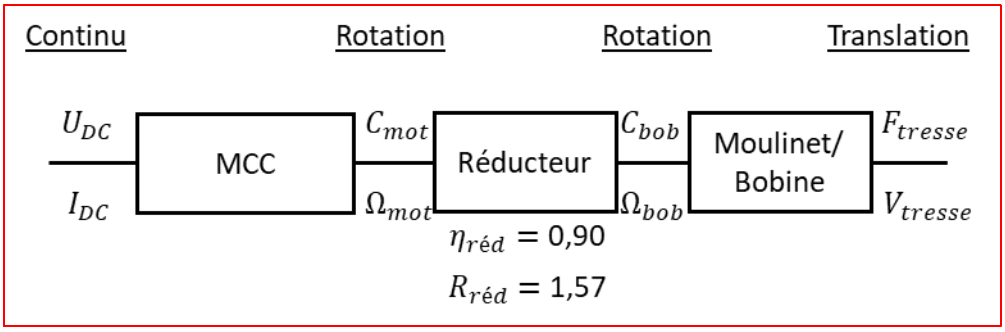
2.1 Calculer la vitesse de rotation requise pour l'axe afin d'obtenir un rembobinage à 2 m/s lorsque la bobine est quasiment vide (cas 1) ainsi que celle lorsqu'elle est presque pleine (cas 2).

Pour r_{bmin}, on a $\Omega_{max} = \frac{V}{r_{bmin}} = 200$ rad/s (**cas 1**)

Pour r_{bmax}, on a $\Omega_{min} = \frac{V}{r_{bmax}} = 49.4$ rad/s (**cas 2**)

Le réducteur permettant d'assurer l'adaptation de la vitesse de rotation du moteur à celle de la bobine a un rapport de réduction $R_{réd} = \Omega_{moteur}/\Omega_{bobine} = 1{,}57$. Il est supposé que son rendement $\eta_{réd}$ est de 90 %.

2.2 Tracer le schéma synoptique du moulinet avec le moteur, le réducteur et la bobine.



2.3 Quelle sera alors la vitesse de rotation du moteur électrique minimale et préciser de quel cas il s'agit (cas 1 ou cas 2) ?

La vitesse sera dans le cas 2 car c'est là que le moulinet a son rayon maximal.

$\Omega_{\min} = 1.57 \times 49.4 = \mathbf{77.6}$ **rad/s** (soit **741 tr/min** approximativement)

2.4 Vu la puissance du moteur électrique, quelle est la puissance maximale disponible sur l'axe du moulinet ? En déduire l'effort maximal transmissible sur la tresse à rayon minimal ?

$P_t = 0.9 \times 360 = \mathbf{324}$ **W** en sortie de réducteur

$F_t = 324/2 = \mathbf{162}$ **N** à vitesse de 2 m/s

2.5 Dans ce même cas, en déduire les couples sur l'axe de la bobine et sur l'axe du moteur (en prenant en compte $\eta_{réd}$).

$C_{bobine} = F_t . r_{b\min} = 162 \times 0.01 = \mathbf{1.62}$ **N.m**

Au niveau du moteur, on a un couple $C_m = \frac{C_b}{\eta_{réd} . R_{réd}} = \frac{1.62}{0.9 \times 1.57} = \mathbf{1.15}$ **N.m**

2.6 Calculer la puissance électrique demandée par le moteur dans les deux cas si l'on admet que le couple sur l'axe reste le même quel que soit le rayon de la bobine.

Pour $r_{b\min}$, $P_m = 360$ W et donc $P_{alim} = \frac{360}{0.8} = \mathbf{450}$ **W**

Pour $r_{b\max}$, $P_t = 1.62 \times 49.4 = 80$ W donc $P_m = 88.9$ W et donc $P_{alim} = \frac{140}{0.8} = \mathbf{111.1}$ **W**

2.7 En admettant que le moteur soit alimenté sous une tension de 24 V lorsque sa puissance mécanique est à son maximum de 360 W, calculer le courant requis. Déduire de ce résultat et du couple maximal du moteur (éventuellement obtenu à la question 5), la valeur de la constante de couple k_T de la machine (en N.m/A).

On a 450 W sous 24 V, le courant absorbé par la machine vaut $I = \frac{450}{24} = \mathbf{18.75}$ **A**

Pour ce courant, on a un couple de 1.15 N.m, on en déduit que $k_T = \frac{1.15}{18.75} = \mathbf{61.3}$ **mN.m/A**

2.8 En admettant que cette constante k_T est identique dans la relation $E = k_T.\Omega$, en déduire la f.e.m. E de la machine à ce point de fonctionnement.

$E = k_T.\Omega = 0.0613 \times 314 = \mathbf{19.3}$ **V**

III. Transfert de charges d'un condensateur a un autre condensateur (30 min)

On considère le circuit ci-dessous. Le condensateur C_1 est initialement chargé sous la différence de potentiel E : $U_1(0) = E$ alors que l'interrupteur K est ouvert. Le condensateur C_2 est initialement déchargé. On rappelle que la charge électrique Q d'un condensateur est exprimée par Q=CU (C= capacité du condensateur, U étant la différence de potentiel aux bornes du condensateur) et que le courant circulant dans un condensateur est donné par : $i(t) = C\frac{dU}{dt}$.

A l'instant t=0, l'interrupteur K est fermé instantanément. L'équation différentielle régissant alors ce circuit peut s'écrire :

$$R\left(\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\right)\frac{dU_2}{dt} + U_2 = E\left(\frac{C_1}{C_1+C_2}\right)$$

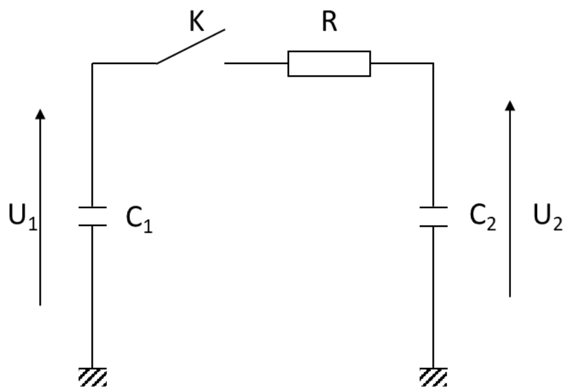


Figure 3.1 : circuit électrique

3.1 Résolvez l'équation différentielle pour donner l'expression de la tension $U_2(t)$ aux bornes de C_2.

Sachant que $U_2 = 0\ V$ lorsque l'on ferme l'interrupteur, on trouve :

$$\boldsymbol{U_2(t) = E\left(\frac{C_1}{C_1+C_2}\right)(1-\exp(-t/\tau))\ avec\ \tau = R\left(\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\right)}$$

3.2 A partir de cette expression, on peut montrer que quand t→∞, $U_1 = U_2 = U_{eq}$. Déterminez l'expression de la tension d'équilibre U_{eq} vers laquelle tendent U_1 et U_2.

$$\boldsymbol{U_{eq} = E\left(\frac{C_1}{C_1+C_2}\right)}$$

3.3 A partir de la réponse à la question 3.1, déduire l'expression du courant i(t) dépendant de C_1, C_2, E et R.

On peut écrire que $i(t) = C_2\frac{dU_2}{dt} = \boldsymbol{\frac{E}{R}\exp(-t/\tau)}$

3.4 Calculez l'expression de puissance instantanée dissipée dans la résistance R. Déduisez-en l'expression de l'énergie consommée par la résistance (entre t=0 et t→∞).

$$p_R(t) = R\times i^2 = \frac{1}{R}(E\exp(-t/\tau))^2 = \boldsymbol{\frac{E^2}{R}\exp(-2t/\tau)}$$

$$E_R = \int_{t=0}^{+\infty} p_R(t) = \left[-\frac{\tau}{2}\times\frac{E^2}{R}\exp(-2t/\tau)\right]_0^{+\infty} = \frac{\tau}{2}\times\frac{E^2}{R} = \boldsymbol{\frac{E^2}{2}\left(\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\right) = \frac{1}{2}C_1E^2\times\frac{C_2}{C_1+C_2}}$$

3.5 A t=0, exprimez la charge électrique Q_1 du condensateur C_1 ainsi que la charge électrique Q_2 du condensateur C_2. Déduisez-en l'énergie totale initialement stockée dans le circuit.

$\boldsymbol{Q_1 = E\ C_1}$ et $\boldsymbol{Q_2 = 0\times C_2}$

$$\boldsymbol{E_{init} = E_{C1} + E_{C2} = \frac{1}{2}C_1E^2}$$

3.6 De même, déterminez l'énergie totale stockée dans le circuit en régime permanent (quand $U_1 = U_2$, $t \rightarrow \infty$).

$$E_{eq} = E_{C1,eq} + E_{C2,eq} = \frac{1}{2} C_1 U_{eq}^2 + \frac{1}{2} C_2 U_{eq}^2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2) U_{eq}^2$$

$$E_{eq} = \frac{(E\ C_1)^2}{2(C_1 + C_2)} = \frac{1}{2} C_1 E^2 \times \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

On retrouve une formulation proche de l'énergie initiale, à un coefficient près.

3.7 Comparez la différence entre l'énergie totale stockée en régime permanent, l'énergie présente dans le circuit initialement et l'énergie dissipée par la résistance. Ces valeurs sont-elles cohérentes entre elles ?

En régime permanent : $E_{eq} = \frac{1}{2} C_1 E^2 \times \frac{C_1}{C_1 + C_2}$

A l'état initial : $E_{init} = \frac{1}{2} C_1 E^2$

Energie dissipée par la résistance : $E_R = \frac{1}{2} C_1 E^2 \times \frac{C_2}{C_1 + C_2}$

On retrouve bien $E_{eq} + E_R = \frac{1}{2} C_1 E^2 \times \frac{C_1}{C_1 + C_2} + \frac{1}{2} C_1 E^2 \times \frac{C_2}{C_1 + C_2} = \frac{1}{2} C_1 E^2 = E_{init}$

Ces résultats sont cohérents.