MT09-A2018 – Examen médian – Questions de cours

Durée : 30mn. Sans documents ni outils électroniques – Rédiger sur l'énoncé

NOM PRÉNOM : Place n^o:

ATTENTION, il y a 3 exercices indépendants pour cette partie questions de cours!

Exercice 1 *(barème approximatif : 2 points)*

Soient A une matrice carrée inversible de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ $(n > 0)$.

1. Rappeler l'expression du conditionnement de A.

   Réponse : cf. cours. ☐

2. Montrer que $|||I||| = 1$ et en déduire une minoration sur le conditionnement.

   Réponse : on a : $|||I||| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ix\|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$. **De plus** $I = AA^{-1}$ **implique** $1 = |||I||| \leq \chi(A)$ **car** $|||AB||| \leq |||A||| |||B|||$**.** ☐

3. Soit x la solution du système $Ax = b$, où $b \in \mathbb{R}^n$. Soit δb un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$. Soit $x + \delta x$ la solution de $A(x + \delta x) = b + \delta b$. Donner en la démontrant une majoration de l'erreur $\|\delta x\|/\|x\|$.

   Réponse : cf. cours. ☐

Exercice 2 *(barème approximatif : 1.5 points)*

Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle $(n > 0)$. Soit une base orthonormée $(y_i)_{i=1,\ldots,n}$ de vecteurs propres associés aux valeurs propres $(\lambda_i)_{i=1,\ldots,n}$ pour A. On suppose que les valeurs propres sont ordonnées : $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$.

1. Que vaut $y_i^T y_j$ pour $i, j = 1, \ldots, n$?

   Réponse : comme $(y_i)_{i=1,\ldots,n}$ **est orthonormée, on a** $y_i^T y_j = 0$ **si** $i \neq j$**, et** $y_i^T y_i = \|y_i\|_2^2 = 1$**.** ☐

2. En utilisant la base $(y_i)_{i=1,\ldots,n}$, calculez $x^T x$.

   Réponse : on décompose x **dans la base** $(y_i)_{i=1,\ldots,n}$ **: il existe des uniques** $\xi_j, j = 1, \ldots, n$ **tels que** $x = \sum_{j=1}^n \xi_j y_j$**. Comme la base est orthonormée, on trouve :** $x^T x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \xi_j y_i^T y_j = \sum_{j=1}^n \xi_j^2$**.** ☐

3. Calculez $x^T Ax$.

   Réponse : comme y_j **est vecteur propre pour la valeur propre** λ_j**, il vient par linéarité de** A **:** $Ax = \sum_{j=1}^n \xi_j Ay_j = \sum_{j=1}^n \lambda_j \xi_j y_j$**. D'où, comme la base est orthonormée, on trouve :** $x^T Ax = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \xi_j \lambda_j y_i^T y_j = \sum_{j=1}^n \lambda_j \xi_j^2$**.** ☐

4. En déduire : $\sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{x^T Ax}{x^T x} \leq \lambda_n$.

   Réponse : soit $x \neq 0$**. En utilisant l'ordre des valeurs propres, il vient** $x^T Ax \leq \lambda_n(\sum_{j=1}^n \xi_j^2) = \lambda_n x^T x$**. Comme** $x \neq 0$**, on peut diviser par** $x^T x = \|x\|_2^2 \neq 0$ **et obtenir la majoration :** $\frac{x^T Ax}{x^T x} \leq \lambda_n$ **vraie pour tout** $x \neq 0$**. On a un majorant de** $\frac{x^T Ax}{x^T x}$ **indépendant de** $x \neq 0$**. On passe au** sup **à gauche qui est le plus petit des majorants pour obtenir le résultat.** ☐

Exercice 3 *(barème approximatif : 2 points)*

1. Définir l'ensemble des flottants $\mathcal{F}_{10}$. On expliquera ce que signifie les constantes t, L et U (notations du cours).

   Réponse : cf. cours. ☐

2. Dans le reste de cet exercice, on prend $t = 3$, $L = -10$, $U = 10$. Donner l'écart entre deux flottants successifs.

   Réponse : cf. cours : $\delta_e = 10^{-t+e} = 10^{-3+e}$**.** ☐

3. Donnez, en expliquant vos calculs, le résultat flottant de $10^6 - 600$.

   Réponse : cf. cours : $10^6 = 0.100 \times 10^7$ **et** $600 = 0.600 \times 10^3$**. On pose** $\tilde{x} = 10^6 \ominus 600$**. Il vient :**

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= 10^6 \ominus 600 = \mathrm{fl}(0.100 \times 10^7 - 0.600 \times 10^3) \\ &= \mathrm{fl}(0.100 \times 10^7 - 0.00006 \times 10^7) = \mathrm{fl}(0.09994 \times 10^7) \\ &= 0.999 \times 10^6 = 999\,000\end{aligned}$$

   car on arrondit au plus proche flottant de $\mathcal{F}_{10}$**. La valeur exacte vaut** $x = 999\,400$**.** □

4. Calculez l'erreur relative commise sur ce calcul. Commentez.

   Réponse : L'erreur relative vaut

$$\frac{|x - \tilde{x}|}{|x|} = \frac{|999\,000 - 999\,400|}{999\,400} = \frac{400}{999\,400} \approx 4 \times 10^{-4},$$

   ce qui est inférieur à $\varepsilon_{\mathbf{mach}} = 5 \times 10^{-3}$**, comme attendu par la théorie.** □

MT09-A2018- Examen médian
Durée : 1h30.
Polycopiés de cours et scilab autorisés - pas d'outils numériques

Questions de cours déjà traitées : environ *5.5 points*.
RÉDIGER LES EXERCICES 1 ET 2 SUR LA MÊME COPIE!
RÉDIGER LES EXERCICES 3 ET 4 SUR LA MÊME COPIE!

Exercice 1 : *(barème approximatif : 5.5 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Il est possible de traiter une question en admettant les résultats précédents.

Soit n un entier strictement positif. Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ tridiagonale définie par

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix},$$

où les a_i, b_i et c_i $(i = 1, \dots, n)$ sont respectivement les composantes des vecteurs $a, b, c \in \mathbb{R}^n$.

On cherche à réaliser la factorisation $A = UL$ (attention, l'ordre est bien UL et non LU) de A, sous la forme du produit d'une matrice triangulaire supérieure U et d'une triangulaire inférieure L qui ont la forme suivante :

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & u_2 & v_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & v_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & u_{n-2} & v_{n-2} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & u_{n-1} & v_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & l_3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & l_{n-2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & l_{n-1} & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & l_n & 1 \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

où les u_i, v_i et l_i $(i = 1, \dots, n)$ sont respectivement les composantes des vecteurs $u, v, l \in \mathbb{R}^n$.

On suppose dans tout l'exercice que la factorisation $A = UL$ est faisable sans permutation et est unique.

1. (a) En identifiant la dernière ligne de A notée $\underline{A}_n$ avec le produit UL, déterminer u_n et l_n en fonction de a_n et b_n.

Réponse : les règles du produit matriciel donnent : $\underline{A}_n = \underline{U}_n L = u_n \underline{L}_n$, ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned} [0, \dots, 0, a_n, b_n] &= \\ u_n[0, \dots, 0, l_n, 1\,] & \end{aligned}$$

En identifiant, on obtient :

$$u_n = b_n, \quad l_n = \frac{a_n}{u_n}, \quad \textbf{si } u_n \neq 0.$$

□

(b) Soit $i \in \{2, \dots, n-1\}$. En identifiant la ligne i de A notée $\underline{A}_i$ avec le produit UL, déterminer v_i et l_i en fonction de a_i, b_i, c_i et u_i. Déterminer également u_i en fonction de l_{i+1} et de composantes de a, b, c.

Réponse : les règles du produit matriciel donnent : $\underline{A}_i = \underline{U}_i L = u_i \underline{L}_i + v_i \underline{L}_{i+1}$, ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned} [0, \dots, 0,\ a_i,\ \ b_i\ \ , c_i\ , 0, \dots, 0] &= \\ u_i[0, \dots, 0,\ l_i,\ \ 1\ \ , 0\ , 0, \dots, 0] &+ \\ v_i[0, \dots, 0,\ 0,\ \ l_{i+1}\ \ , 1\ , 0, \dots, 0] & \end{aligned}$$

En identifiant, on obtient pour $i \in \{2, \dots, n-1\}$:

$$v_i = c_i, \quad u_i = b_i - v_i l_{i+1}, \quad l_i = \frac{a_i}{u_i}, \quad \textbf{si } u_i \neq 0.$$

On peut aussi travailler élément par élément. Comme U est triangulaire supérieure et L est triangulaire inférieure, on a : $U_{ik} = 0$ si $i > k$ et $L_{kj} = 0$ si $j > k$. Donc si $i \leq k$ alors $U_{ik} \neq 0$ *a priori*, et si $j \leq k$ alors $L_{kj} \neq 0$ *a priori*. Donc pour $i, j = 1, \ldots, n$, il vient :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{n} U_{ik} L_{kj} = \sum_{k=\max\{i,j\}}^{n} U_{ik} L_{kj}.$$

De plus en utilisant le fait que U et L sont bidiagonales ($U_{ik} \neq 0$ *a priori* si $k = i, i+1$ et $L_{kj} \neq 0$ *a priori* si $k = j, j+1$), on obtient pour $i, j = 1, \ldots, n$:

$$A_{ij} = \sum_{k=\max\{i,j\}}^{\min\{n,i+1,j+1\}} U_{ik} L_{kj}.$$

□

(c) Donner ces relations pour $i = 1$.
Réponse : de même, on obtient pour $i = 1$:

$$v_1 = c_1, \quad u_1 = b_1 - v_1 l_2.$$

□

2. (a) Écrire une fonction scilab notée
`[u, v, l] = ULtridiag(a, b, c)`
qui implémente cette factorisation $A = UL$.
Réponse : pour calculer U et L, il faut faire une remontée. On pourrait montrer que les u_i sont des pivots de cette méthode $A = UL$ (attention ce ne sont pas les mêmes pivots que pour la méthode de Gauss classique donnant $A = LU$). Voici une implémentation possible avec un test sur la non-nullité des u_i :

```
====================================
function [u, v, l] = ULtridiag(a, b, c)
n = length(b);
tol = 1e-12;
if n ~= length(a) | n~=length(c)
    error('Not correct size vector');
end

l = zeros(n,1); u = zeros(n,1);
v = c;

ii = n; u(ii) = b(ii);
if (abs(u(ii))) < tol
    msg_err = sprintf("pivot no %d nul (=%f).", ii, u(ii)); error(msg_err);
end

for ii = n-1:-1:1
    l(ii+1) = a(ii+1) / u(ii+1);
    u(ii) = b(ii) - v(ii) * l(ii+1);
    if (abs(u(ii))) < tol
        msg_err = sprintf("pivot no %d nul (=%f).", ii, u(ii)); error(msg_err);
    end
end
l(1) = - %inf; // never used.
endfunction
====================================
```

□

(b) Écrire une fonction scilab notée
`[x] = solsuptridiag(u, v, b)`
qui résout $Ux = b$, où la matrice triangulaire supérieure et bidiagonale U est comme dans l'équation (1).
Réponse : C'est une adaptation de solsup au cas tridiagonal :

```
====================================
function [x] = solsuptridiag(u, v, b)
```

```
n = length(b);
if ( length(u) ~= n | length(v) ~= n )
      error('Not a correct size')
end

x = zeros(n,1);
tol = 1e-12;

ii = n;
if abs( u(ii) ) < tol
      msg_err = sprintf("terme diag no %d nul (=%f).", ii, u(ii)); error(msg_err);
end
x(ii) = b(ii) / u(ii);

for ii = n-1:-1:1
      if abs( u(ii) ) < tol
           msg_err = sprintf("terme diag no %d nul (=%f).", ii, u(ii)); error(msg_err);
      end
      x(ii) = ( b(ii) - v(ii)*x(ii+1) ) / u(ii);
end
endfunction
====================================
```

□

(c) On suppose *donnée* une fonction scilab notée
`[x] = solinftridiag(d, l, b)`
qui résout $Lx = b$, où la matrice triangulaire inférieure et bidiagonale L contient les vecteurs d sur la diagonale et l sous la diagonale. On ne demande **pas** d'écrire `solinftridiag`.

En utilisant les fonctions précédentes, écrire une fonction scilab notée
`[x] = resolULtridiag(a, b, c, y)`
qui réalise la factorisation $A = UL$ puis qui résout le système $Ax = y$, pour un vecteur $y \in \mathbb{R}^n$ donné.

Réponse : on écrit $Ax = y \Longleftrightarrow ULx = y \Longleftrightarrow \{Uz = y$ et $Lx = z\}$. Exemple d'implémentation :

```
====================================
function [x] = resolLUtridiag(a, b, c, y)
exec("solsuptridiag.sci", -1); exec("solinftridiag.sci", -1); exec("ULtridiag.sci", -1);
n = length(b);

[u, v, l] = ULtridiag(a, b, c); // factorize A=UL

z = solsuptridiag( u, v, y ); // solve : Uz=y
x = solinftridiag( ones(n,1), l, z ); // solve : Lx=z
endfunction
====================================
```

□

3. (a) Donner le coût en nombre de multiplications et divisions de votre fonction `resolULtridiag`. (On supposera que le coût de `solinftridiag` est le même que `solsuptridiag`).

Réponse : Coût de `ULtridiag` : $2(n-1)$.
Coût de `solsuptridiag` : $2(n-1)+1$.
Total = coût de `resolULtridiag` : $6(n-1)+2 \approx 6n$.
(Note : en pratique, si on tient compte du fait que $diag(L) = 1$, on n'a pas de division à faire dans `solinftridiag`, et on peut n'avoir que $5(n-1)+1 \approx 5n$ opérations à faire.)

□

(b) La matrice A est toujours tridiagonale. On se donne $p > 0$ vecteurs $y_i \in \mathbb{R}^n$, on veut résoudre les p systèmes $Ax_i = y_i$.

Donner, en expliquant bien ce que vous faites, le coût minimal pour résoudre ces p systèmes.

Réponse : il vaut mieux ne pas appeler `resolULtridiag` qui opère inutilement la factorisation $A = UL$ à chaque fois. Il est préférable de calculer la factorisation une seule fois et ensuite résoudre les $2p$ systèmes triangulaires en changeant le second membre.
Coût de `ULtridiag` : $2(n-1)$.
Coût de p appels à `solsuptridiag` et à `solinftridiag` : $2p(2(n-1)+1)$.
Total = coût de `resolULtridiag` : $2(2p+1)(n-1)+2p \approx (4p+2)n$.

(Coût de p appels à `resolULtridiag` : $\approx 6pn$.)

$\square$

Exercice 2 : *(barème approximatif : 3 points)*

RÉDIGER SUR LA MÊME COPIE QUE L'EXERCICE 1

Soit a un réel et la matrice A définie par

$$A = \begin{bmatrix} 4 & a & a \\ a & 4 & a^2/4 \\ a & a^2/4 & 4 \end{bmatrix}.$$

1. Réaliser la factorisation de Cholesky de A et donner les conditions sur a pour que cette factorisation soit faisable.

   Réponse : en identifiant $A = CC^T$, où C est triangulaire inférieure avec $c_{ii} > 0$ pour $i = 1, 2, 3$, on réalise l'algorithme de Cholesky et on trouve :

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a/2 & 2\sqrt{1 - a^2/16} & 0 \\ a/2 & 0 & 2\sqrt{1 - a^2/16} \end{bmatrix}, \qquad \textbf{ssi } |a| < 4.$$

$\square$

2. Sans calcul supplémentaire, donnez une condition nécessaire et suffisante sur a pour que A soit symétrique définie positive.

   Réponse : d'après le cours, Cholesky est faisable si et seulement si A est SDP. Donc ici A SDP ssi $|a| < 4$. $\square$

3. Donner dans ce cas le déterminant de A.

   Réponse : on a : $\det(A) = \det(C)\det(C^T) = (\det(C))^2 = \Pi_{i=1}^n c_{ii}^2$, car C est triangulaire. Il vient : $\det(A) = (8 - \dfrac{a^2}{2})^2$.

$\square$

Exercice 3 : *(barème approximatif : 5.5 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Soit la suite $(V^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} = (\begin{bmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{bmatrix})_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$, définie par la relation :

$$\begin{cases} V^{(k+1)} = CV^{(k)} + d, \quad \forall k = 0, 1, \ldots \quad \text{avec } C = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } d = \dfrac{1}{2}a, \\ V^{(0)} \text{ donné dans } \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{2}$$

où $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ est un vecteur donné de $\mathbb{R}^2$.

1. La suite (2) converge-t-elle? Justifier la réponse.

   Réponse : on $|||C|||_1 = |||C|||_\infty = \frac{1}{2} < 1$, donc la suite converge quel que soit $V^{(0)}$. $\square$

2. Si la suite converge vers un vecteur $V = (x\ y)^T$, quel est le système d'équations $AV = b$ que vérifie V? On précisera la matrice $A \in \mathcal{M}_{22}$ et le second membre $b \in \mathbb{R}^2$ de ce système. (On pourra exprimer b simplement en fonction du vecteur a).

   Réponse : à convergence, on a $(I - C)V = d \Longleftrightarrow 2(I - C)V = a$. On peut poser par exemple

$$A = 2(I - C) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \textbf{et} \qquad b = a.$$

$\square$

3. La suite (2) aurait pu être obtenue en appliquant une méthode itérative connue au système $AV = b$. Quelle est cette méthode? Justifier.

   Réponse : on reconnaît la méthode de Jacobi $V^{(k+1)} = JV^{(k)} + g$, dont la matrice d'itération est $J = D^{-1}(E + F)$ avec les notations du cours et le second membre est $g = D^{-1}b$. En effet :

$$J = D^{-1}(E + F) = (2I)^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}I\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = C$$

et $g = D^{-1}b = \frac{1}{2}a = d$. $\square$

4. Quel théorème du cours permettrait de répondre directement à la question 1.?

   Réponse : comme A est à diagonale strictement dominante, la méthode de Jacobi converge. $\square$

5. On applique la méthode de Gauss–Seidel au système $AV = b$. Exprimer $V^{(k+1)}$ en fonction de $V^{(k)}$. On précisera ce que vaut la matrice R de l'itération de Gauss–Seidel.

   Réponse : la méthode de Gauss–Seidel s'écrit $V^{(k+1)} = RV^{(k)} + h$ pour $k \geq 0$ et $V^{(0)}$ donné, où $R = (D - E)^{-1}F$ et $h = (D - E)^{-1}b$. Il vient

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   et $h = \dfrac{1}{4} \begin{bmatrix} 2a_1 \\ a_1 + 2a_2 \end{bmatrix}$**.**

   $\square$

6. La méthode de Gauss-Seidel converge-t-elle? Justifier.

   Réponse : comme A est à diagonale strictement dominante, la méthode de Gauss–Seidel converge.

   On peut aussi remarquer que $|||R|||_1 = \frac{3}{4} < 1$ (ou que $|||R|||_\infty = \frac{1}{2} < 1$), donc la méthode de Gauss–Seidel converge. $\square$

Exercice 4 : *(barème approximatif : 3 points)*

RÉDIGER SUR LA MÊME COPIE QUE L'EXERCICE 3

Soit deux entiers n_1 et n_2 tous deux > 0. Soient deux matrices symétriques $A_1 \in \mathcal{M}_{n_1,n_1}$ et $A_2 \in \mathcal{M}_{n_2,n_2}$ et une matrice $B \in \mathcal{M}_{n_2,n_1}$. On suppose de plus que A_1 est inversible.

On définit une matrice A par blocs,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & B^T \\ B & A_2 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que A est symétrique.

   Réponse : on transpose A en tranposant les blocs :

$$A^T = \begin{bmatrix} A_1^T & B^T \\ (B^T)^T & A_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B^T \\ B & A_2 \end{bmatrix} = A,$$

   car A_1 et A_2 sont symétrique et car $(B^T)^T = B$. $\square$

2. Réaliser la factorisation $A = LDL^T$ par blocs.

   On appellera $D_1 \in \mathcal{M}_{n_1,n_1}$ et $D_2 \in \mathcal{M}_{n_2,n_2}$ les deux blocs diagonaux de D.

   Réponse : on cherche à factoriser A sous la forme :

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ L_{21} & I_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_1} & L_{21}^T \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ L_{21}D_1 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_1} & L_{21}^T \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} D_1 & D_1 L_{21}^T \\ L_{21}D_1 & D_2 + L_{21}D_1L_{21}^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

   où $L_{21} \in \mathcal{M}_{n_2,n_1}$. En identifiant et en utilisant le fait que A_1 est inversible, on obtient

$$\begin{cases} A_1 = D_1 \\ B = L_{21}D_1 \\ B^T = D_1 L_{21}^T \\ A_2 = D_2 + L_{21}D_1L_{21}^T \end{cases} \iff \begin{cases} D_1 = A_1 \\ L_{21} = BA_1^{-1} \\ D_2 = A_2 - (L_{21})(D_1L_{21}^T) \end{cases} \iff \begin{cases} D_1 = A_1 \\ L_{21} = BA_1^{-1} \\ D_2 = A_2 - (BA_1^{-1})(B^T) \end{cases},$$

   car les 2 lignes du milieu du système de gauche sont équivalentes car $B^T = (L_{21}D_1)^T = D_1^T L_{21}^T = D_1 L_{21}^T$, du fait que $D_1 = A_1$ est symétrique.

   Finalement en posant $S = A_2 - BA_1^{-1}B^T$, on obtient

$$A = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ BA_1^{-1} & I_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_1} & A_1^{-1}B^T \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix}.$$

   $\square$

3. On suppose que D_1 et D_2 sont symétriques définies positives. Montrer que A l'est aussi.

Réponse : soit un vecteur par blocs $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$. **Il vient :**

$$\begin{aligned} X^T A X &= X^T L D L^T X = Y^T D Y \qquad \textbf{en posant } Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = L^T X = \begin{bmatrix} X_1 + A_1^{-1} B^T X_2 \\ X_2 \end{bmatrix} \\ &= Y^T \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} Y = Y_1^T A_1 Y_1 + Y_2^T S Y_2 \ \geq \ 0, \end{aligned}$$

car $D_1 = A_1$ **et** $D_2 = S$ **sont SDP. Donc** A **est semi-définie positive.**

De plus, supposons $X^T A X = 0$. **Alors comme** $Y_1^T A_1 Y_1 \geq 0$ **et** $Y_2^T S Y_2 \geq 0$**, ceci implique que** $Y_1^T A_1 Y_1 = Y_2^T S Y_2 = 0$**, ce qui prouve que** $Y_1 = 0$ **et** $Y_2 = 0$**.**

On remarque que L^T **est inversible car**

- L^T **est triangulaire supérieure (et non seulement triangulaire par blocs) car les blocs diagonaux (**I_{n_1} **et** I_{n_2}**) sont diagonaux.**
- **la diagonale de** L^T **est composée de** $1 (\neq 0)$**.**

Donc $X = L^{-T} Y = 0$**. Donc** A **est SDP.**

$\square$