Exercice A.2.9 du poly. *(Indication : utiliser les contraposées des liens logiques vus en cours pour répondre aux questions).*

1. $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Il peut être utile de remarquer que f est symétrique en les variables x et y : $f(x,y) = f(y,x)$.

(a) l'application f est continue en $(0,0)$. En effet, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^2 \sin\big(\cos\theta\sin\theta\big).$$

Donc, $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$, $|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0,0)| = r^2 \underbrace{|\sin\big(\cos\theta\sin\theta\big)|}_{\leq 1} \leq r^2$, car $\operatorname{Im}\sin = [-1,1]$. On pose $g(r) = r^2$ qui vérifie $g(r) \underset{r\to 0}{\to} 0$. La condition suffisante de continuité est vérifiée.

(b) • $\dfrac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \dfrac{h^2\sin(\frac{h\times 0}{h^2}) - 0}{h} = 0 \underset{h\to 0}{\to} 0$. Donc $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0}$.

• Par symétrie , $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0}$.

(c) On calcule $\varepsilon(h,k)$ tel que

$$f(0+h,0+k) = \underbrace{f(0,0)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}_{=0} \times h + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}_{=0} \times k + \sqrt{h^2+k^2}\,\varepsilon(h,k).$$

On a donc $\varepsilon(h,k) = \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sqrt{h^2+k^2}\sin\left(\frac{hk}{h^2+k^2}\right)$.

On vérifie alors si $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$ ou non. Cela revient à étudier la continuité de la fonction ε en posant $\varepsilon(0,0) = 0$. On regarde l'expression en coordonnées polaires : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\varepsilon(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\sin\big(\cos\theta\sin\theta\big).$$

Par conséquent, $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$, $|\varepsilon(r\cos\theta, r\sin\theta) - 0| = r\underbrace{|\sin\big(\cos\theta\sin\theta\big)|}_{\leq 1} \leq r$, car $\operatorname{Im}\sin = [-1,1]$. On pose $g(r) = r$ qui vérifie $g(r) \underset{r\to 0}{\to} 0$. La condition suffisante de continuité est vérifiée pour ε.

(d) On commence par calculer les dérivées partielles premières en tout point $(x,y) \neq (0,0)$.

• $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) + (x^2+y^2) \times \frac{y(x^2+y^2) - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = 2x\sin\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) + \frac{y^3-x^2y}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)$.

• Par symétrie, on obtient $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) + \frac{x^3-y^2x}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)$.

Ensuite, on étudie la continuité en $(0,0)$ pour $\frac{\partial f}{\partial x}$. Par symétrie, le résultat sera le même pour $\frac{\partial f}{\partial y}$.

On majore l'écart en coordonnées cartésiennes pour commencer :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| \leq 2|x| + \tfrac{|y^3-x^2y|}{x^2+y^2} \leq 2|x| + \frac{|y|^3}{x^2+y^2} + \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} \leq 2|x| + \frac{|y|^3}{y^2} + \frac{x^2|y|}{x^2} = 2(|x|+|y|).$$

On conclut en coordonnées polaires : $\forall\,\theta \in \mathbb{R}$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| = 2r\left(\underbrace{|\cos\theta|}_{\leq 1} + \underbrace{|\sin\theta|}_{\leq 1}\right) \leq 4r$$

On pose $g(r) = 4r$ qui vérifie $g(r) \underset{r\to 0}{\to} 0$. La condition suffisante de continuité pour $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,0)$ est vérifiée.

6. $f(x,y)=x^2+y^2$
Les dérivées partielles de tout ordre existent en tout point de $\mathbb{R}^2$ donc f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

7. $f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$
La fonction f est symétrique en les variables x et y : $f(x,y)=f(y,x)$.

(a) l'application f est continue en $(0,0)$. En effet, pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, on a

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta)=r\cos\theta\sin\theta.$$

Donc, $\forall\ \theta\in\mathbb{R}$, $|f(r\cos\theta,r\sin\theta)-f(0,0)| = r\underbrace{|\cos\theta|}_{\leq 1}\underbrace{|\sin\theta|}_{\leq 1}\leq r$, car $\operatorname{Im}\cos=[-1,1]$. On pose $g(r)=r$ qui vérifie $g(r)\underset{r\to0}{\to}0$. La condition suffisante de continuité est vérifiée.

(b) • $\dfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\dfrac{\frac{h\times 0}{\sqrt{h^2}}-0}{h}=0\underset{h\to0}{\to}0$. Donc $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0}$.

• Par symétrie, on a $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0}$.

(c) On calcule $\varepsilon(h,k)$ tel que

$$f(0+h,0+k)=\underbrace{f(0,0)}_{=0}+\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}_{=0}\times h+\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}_{=0}\times k+\sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k).$$

On a donc $\varepsilon(h,k)=\frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{hk}{h^2+k^2}$.
Prenons le chemin d'équation $x=y$. Alors $\varepsilon(t,t)=\frac{t^2}{2t^2}=\frac{1}{2}\underset{t\to0}{\to}\frac{1}{2}\neq 0$.
La fonction f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

(d) Par contraposée, f n'est pas différentiable en $(0,0)$ donc aucune des dérivées partielles n'est continue en $(0,0)$.

8. $f(x,y)=\begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$
Il peut être utile de remarquer que f est symétrique en les variables x et y : $f(x,y)=f(y,x)$.

(a) l'application f est continue en $(0,0)$. En effet, pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, on a

$$f(r\cos\theta,r\sin\theta)=r^2\sin\left(\tfrac{1}{r}\right).$$

Donc, $\forall\ \theta\in\mathbb{R}$, $|f(r\cos\theta,r\sin\theta)-f(0,0)|=r^2\underbrace{|\sin\left(\tfrac{1}{r}\right)|}_{\leq 1}\leq r^2$, car $\operatorname{Im}\sin=[-1,1]$. On pose $g(r)=r^2$ qui vérifie $g(r)\underset{r\to0}{\to}0$. La condition suffisante de continuité est vérifiée.

(b) • $\dfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\dfrac{h^2\sin(\frac{1}{|h|})}{h}=h\sin(\frac{1}{|h|})\underset{h\to0}{\to}0$. Donc $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0}$.

• Par symétrie , $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0}$.

(c) On calcule $\varepsilon(h,k)$ tel que

$$f(0+h,0+k) = \underbrace{f(0,0)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}_{=0} \times h + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}_{=0} \times k + \sqrt{h^2+k^2}\,\varepsilon(h,k).$$

On a donc $\varepsilon(h,k) = \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sqrt{h^2+k^2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)$.
On montre que $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$ ou non. Cela revient à étudier la continuité de la fonction ε en posant $\varepsilon(0,0) = 0$. On regarde l'expression en coordonnées polaires : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\varepsilon(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\sin\left(\tfrac{1}{r}\right).$$

Par conséquent, $\forall\ \theta \in \mathbb{R}$, $|\varepsilon(r\cos\theta, r\sin\theta) - 0| = r\underbrace{|\sin\left(\tfrac{1}{r}\right)|}_{\leq 1} \leq r$, car $\operatorname{Im}\sin = [-1,1]$. On pose $g(r) = r$ qui vérifie $g(r) \underset{r\to 0}{\to} 0$. La condition suffisante de continuité est vérifiée pour ε.

(d) On commence par calculer les dérivées partielles premières en tout point $(x,y) \neq (0,0)$.

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.
- Par symétrie, on obtient $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

Ensuite, on étudie la continuité en $(0,0)$ pour $\frac{\partial f}{\partial x}$. Par symétrie, le résultat sera le même pour $\frac{\partial f}{\partial y}$.
Prenons le chemin d'équation $y = 0$ passant par l'origine. Il est décrit par la fonction $\Phi(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $\Phi(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Φ est continue en 0 et

$$\frac{\partial f}{\partial x} \circ \Phi(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,0) = 2\underbrace{t\sin(\tfrac{1}{|t|})}_{\underset{t\to 0}{\to} 0} - \underbrace{\tfrac{t}{|t|}\cos(\tfrac{1}{|t|})}_{= \pm\cos(\frac{1}{|t|})} \underset{t\to 0}{\to} \text{ pas de limite.}$$

La limite n'existe pas, donc $\frac{\partial f}{\partial x} \circ \Phi$ n'est pas continue en $t = 0$. Comme Φ est continue en $t = 0$, on en déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice A.2.12 du poly.
On définit la fonction suivante sur $\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$:

$$f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

• Calcul de la dérivée partielle première par rapport à x :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -\frac{1}{2} \times 2x \times (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}-1} = -x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

• Calcul de la dérivée partielle seconde par rapport à x :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) &= -1 \times (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} - x \times (-\frac{3}{2}) \times 2x \times (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}-1} \\ &= -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} \\ &= -\frac{(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \\ &= \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}.\end{aligned}$$

• La fonction f est symétrique en les variables x et y : en effet $f(x,y,z) = f(y,x,z)$. On peut donc obtenir $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ à partir de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ en échangeant le rôle des variables x et y.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = \frac{2y^2-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

• La fonction f est symétrique en les variables x et z : en effet $f(x,y,z) = f(z,y,x)$. On peut donc obtenir $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ à partir de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ en échangeant le rôle des variables x et z.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = \frac{2z^2-y^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

• On effectue la somme des 3 dérivées secondes :

$$\Delta f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = \frac{(2x^2-y^2-z^2)+(2y^2-x^2-z^2)+(2z^2-y^2-x^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0.$$

Exercice A.2.14 du poly. Dérivées partielles de fonctions composées
Comme ce n'est pas indiqué, les fonctions sont considérée dérivable/différentiable sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$.

4. $F(x,y) = f(x, g(x), h(x,y))$.
- La fonction f est une fonction de trois variables (disons u, v et w) différentiable.
- La fonction g est une fonction d'une variable dérivable.
- La fonction h est une fonction de deux variables différentiable.
- Par composition, la fonction F est différentiable.

$$\begin{aligned}
dF(x,y) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)dy \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial u}(x, g(x), h(x,y)) + g'(x)\frac{\partial f}{\partial v}(x, g(x), h(x,y)) + \frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f}{\partial w}(x, g(x), h(x,y)) \right) dx \\
&\quad + \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\frac{\partial f}{\partial w}(x, g(x), h(x,y))dy
\end{aligned}$$

5. $F(x,y) = f(g(x,y), h(x), k(y))$.
- La fonction f est une fonction de trois variables (disons u, v et w) différentiable.
- Les fonctions h et k sont deux fonctions d'une variable dérivables.
- La fonction g est une fonction de deux variables différentiable.
- Par composition, la fonction F est différentiable.

$$\begin{aligned}
dF(x,y) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)dy \\
&= \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f}{\partial u}(g(x,y), h(x), k(y)) + h'(x)\frac{\partial f}{\partial v}(g(x,y), h(x), k(y)) \right) dx \\
&\quad + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\frac{\partial f}{\partial u}(g(x,y), h(x), k(y)) + k'(y)\frac{\partial f}{\partial w}(g(x,y), h(x), k(y)) \right) dy
\end{aligned}$$

Exercice A.2.22 du poly. Recherche d'extrema locaux
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3y^2(1-x-y)$.

1. La fonction f est polynomiale donc elle est infiniment différentiable. Pour déterminer les points critiques, on résoud $\overrightarrow{\textbf{grad}}\, f(x,y) = 0$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x^2y^2(1-x-y) - x^3y^2 &=& 0 \\ 2x^3y(1-x-y) - x^3y^2 &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x^2y^2(3(1-x-y)-x) &=& 0 \\ x^3y(2(1-x-y)-y) &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x^2y^2(3-4x-3y) &=& 0 \\ x^3y(2-2x-3y) &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \text{ ou } y=0 \text{ ou } 3-4x-3y=0 \\ x=0 \text{ ou } y=0 \text{ ou } 2-2x-3y=0 \end{array}\right.$$

Les points critiques sont donc les points de la forme $(0,y)$ avec $y \in \mathbb{R}$ ou $(x,0)$ avec $x \in \mathbb{R}$ ou $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$.

2. On calcule les dérivées partielles secondes :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = 2xy^2(3-4x-3y) - 4x^2y^2 = 2xy^2(3-6x-3y)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = 2x^2y(3-4x-3y) - 3x^2y^2 = x^2y(6-8x-9y)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = x^3(2-2x-3y) - 3x^3y = x^3(2-2x-6y)$$

<u>Étude en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$</u> :

$$\Delta_{(\frac{1}{2},\frac{1}{3})} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3})\right)^2 - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}) \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3})\right) = (\tfrac{1}{12})^2 - (-\tfrac{1}{9}) \times (-\tfrac{1}{8}) = -\frac{1}{144} < 0$$

La fonction admet admet un extremum local en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$. Puisque $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) = -\frac{1}{9} < 0$, il s'agit d'un maximum local.

<u>Étude en $(0,y)$</u> :
Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $\Delta_{(0,y)} = 0$ donc on ne peut rien conclure. Par conséquent on doit étudier le signe de la différence $f(0+h, y+k) - f(0,y)$ par d'autre moyen. Pour $y \in \mathbb{R}$ et des petites valeurs de h et k on a

$$f(0+h, y+k) - f(0,y) = h^3(y+k)^2(1-h-(y+k)).$$

Le terme $(y+k)^2$ est positif. Il reste à étudier le signe de $h^3(1-h-k-y)$ pour les valeurs de h et k proches de zéro.

- Si $y < 1$ alors pour h et k très petit, le terme $(1-h-k-y)$ est positif. Cependant le terme h^3 change de signe en fonction des petites valeurs positives ou négatives de h donc la différence change de signe. Il n'y a pas d'extrema locaux.
- Si $y > 1$ alors pour h et k très petit, le terme $(1-h-k-y)$ est négatif. Cependant le terme h^3 change de signe en fonction des petites valeurs positives ou négatives de h donc la différence change de signe. Il n'y a pas d'extrema locaux.
- Si $y = 1$ alors $f(0+h, 1+k) - f(0,1) = h^3k^2(-h-k) = h^2k^2(-h^2-hk)$. Le terme h^2k^2 est positif donc il reste à déterminer le signe de $(-h^2-hk)$. Pour toute valeur de h et k telles que $h = k$, la différence est négative, pour toutes les valeurs de h et k telles que $k = -2h$ la différence est positive. On en conclut qu'il n'y a pas d'extremum local ici non plus.

Étude en $(x,0)$:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\Delta_{(x,0)} = 0$ donc on ne peut rien conclure. Par conséquent on doit étudier le signe de la différence $f(x+h, 0+k) - f(x,0)$ par d'autres moyens. Pour $y \in \mathbb{R}$ et des petites valeurs de h et k on a

$$f(x+h, 0+k) - f(x,0) = (x+h)^3 k^2 (1-x-h-k).$$

Le terme k^2 est positif. Il reste à étudier le signe de $(x+h)^3(1-x-h-k)$ pour les valeurs de h et k proches de zéro.

• Si $0 < x < 1$ alors pour h et k très petit, le terme $(1-x-h-k)$ est positif et $(x+h)^3$ est positif. La différence est donc positive. On est en présence d'un minimum local.

• Si $x > 1$ alors pour h et k très petit, le terme $(1-x-h-k)$ est négatif et $(x+h)^3$ est positif. La différence est donc négative. On est en présence d'un maximum local.

• Si $x < 0$ alors pour h et k très petit, le terme $(1-x-h-k)$ est positif et $(x+h)^3$ est négatif. La différence est donc négative. On est en présence d'un maximum local.

• Si $x = 0$ alors $f(0+h, 0+k) - f(0,0) = h^3 k^2 (1-h-k)$. Le terme $k^2(1-h-k)$ est positif, par contre h^3 change de signe donc la différence change de signe. Ce n'est pas un extremum local.

• Si $x = 1$ alors $f(1+h, 0+k) - f(1,0) = (1+h)^3 k^2 (-h-k)$. Le terme $(1+h)^3 k^2$ est positif, par contre $(-h-k)$ change de signe donc la différence change de signe. Ce n'est pas un extremum local.

Exercice A.2.15 du poly. Application : résolution d'une équation aux dérivées partielles

Dans cet exercice, f est une fonction de deux variables (t, x). La première variable est t et la seconde est x.

1. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$. On définit $\phi(u, v) = f(\alpha u + \alpha v, \beta u - \beta v)$.

• On commence par calculer $\frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v}$.

$$\frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial t}(\alpha u + \alpha v, \beta u - \beta v) \times \alpha + \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha u + \alpha v, \beta u - \beta v) \times (-\beta).$$

On dérive chaque terme du membre de droite par rapport à u.

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(\alpha u + \alpha v, \beta u - \beta v)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\alpha u + \alpha v, \beta u - \beta v) \times \alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(\alpha u + \alpha v, \beta u - \beta v) \times \beta.$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha u + \alpha v, \beta u - \beta v)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}(\alpha u + \alpha v, \beta u - \beta v) \times \alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha u + \alpha v, \beta u - \beta v) \times \beta.$$

On obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v}(u, v) = {} & \alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\alpha u + \alpha v, \beta u - \beta v) + \alpha\beta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(\alpha u + \alpha v, \beta u - \beta v) \\ & - \alpha\beta \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}(\alpha u + \alpha v, \beta u - \beta v) - \beta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha u + \alpha v, \beta u - \beta v).\end{aligned}$$

Comme f est de classe $\mathscr{C}^2$ (deux fois continûment différentiable), on en déduit que les dérivées partielles croisées sont égales d'après le théorème de Schwarz.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v}(u, v) = \alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\alpha u + \alpha v, \beta u - \beta v) - \beta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha u + \alpha v, \beta u - \beta v).$$

• Dans cette question on veut trouver les valeurs de α, β de sorte que $\frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} = 0$.

Par hypothèse on sait que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v}(u, v) = 0 & \Leftrightarrow \alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\alpha u + \alpha v, \beta u - \beta v) - \beta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha u + \alpha v, \beta u - \beta v) = 0 \\ & \Leftrightarrow c^2\alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha u + \alpha v, \beta u - \beta v) - \beta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha u + \alpha v, \beta u - \beta v) = 0 \\ & \Leftrightarrow (c^2\alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha u + \alpha v, \beta u - \beta v) = 0.\end{aligned}$$

Il suffit de choisir

$$c^2\alpha^2 - \beta^2 = 0 \Leftrightarrow c^2\alpha^2 = \beta^2 \Leftrightarrow c\alpha = \pm\beta \Leftrightarrow c = \pm\frac{\beta}{\alpha}.$$

2. On doit chercher la forme générale des fonctions ϕ vérifiant $\frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} = 0$.

$$\frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) = 0 \Leftrightarrow \psi(u, v) = \psi_2(v) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) = 0 \Leftrightarrow \psi(u, v) = \psi_1(u).$$

Par conséquent

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial v} = \psi_2(v) \Leftrightarrow \phi(u, v) = \underbrace{\int \psi_2(v)\, dv}_{=\psi_3(v)} + \psi_1(u).$$

3. On effectue le changement de variable inverse avec $c = +\frac{\beta}{\alpha}$.
Dans ce cas
$$\frac{x+ct}{2\beta} = u \quad \text{et} \quad -\frac{x-ct}{2\beta} = v\ ,$$
et
$$f(t,x) = \phi(u,v) = \psi_1\left(\frac{x+ct}{2\beta}\right) + \psi_3\left(-\frac{x-ct}{2\beta}\right).$$
On pose $g(x+ct) = \psi_1\left(\frac{x+ct}{2\beta}\right)$ et $h(x-ct) = \psi_3\left(-\frac{x-ct}{2\beta}\right)$.