Exercice A.2.2 du poly. Recherche du domaine de définition d'une fonction

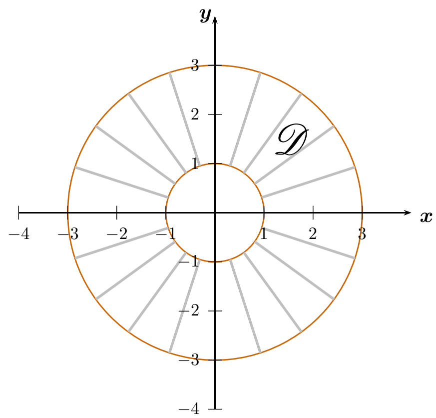
1. $f(x,y) = \ln((9-x^2-y^2)(x^2+y^2-1))$
Le domaine de définition de f est caractérisé par l'inéquation

$$(9-x^2-y^2)(x^2+y^2-1) > 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 9-x^2-y^2 > 0 \\ x^2+y^2-1 > 0 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} 9-x^2-y^2 < 0 \\ x^2+y^2-1 < 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \boxed{1 < x^2+y^2 < 9} \quad \text{ou} \quad \underbrace{9 < x^2+y^2 < 1}_{\text{impossible}}$$

$$D_f := \{M(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; 1 < OM < 3\}.$$

Représentation graphique : Le domaine de définition de f est une couronne (ouverte) délimitée par les cercles centrés en l'origine et de rayons respectifs 1 et 3.

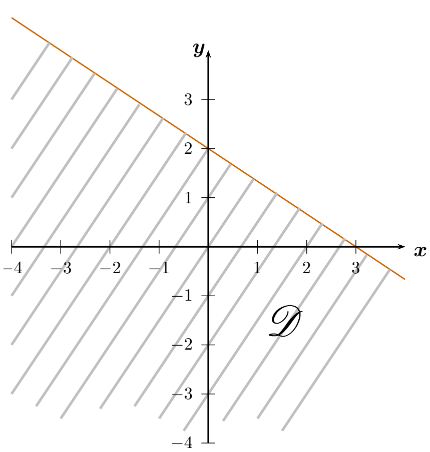


2. $f(x,y) = \sqrt{6-(2x+3y)}$
Le domaine de définition de f est caractérisé par l'inéquation

$$6-(2x+3y) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6 \geq 2x+3y \quad \Leftrightarrow \quad 6-2x \geq 3y \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{2-\frac{2}{3}x \geq y}.$$

$$D_f := \{M(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; y \leq 2-\frac{2}{3}x\}.$$

Représentation graphique : Le domaine de définition de f est le demi-plan (frontière incluse) situé sous la droite d'équation $y = 2-\frac{2}{3}x$.



Exercice A.2.6 du poly. Applications de la condition suffisante de continuité en coordonnées polaires et de la contraposée de l'exercice précédent.

cours : on admet que les fonctions usuelles *polynômes*, *cosinus*, *sinus*, *tangente*, *exponentielle*, *logarithme népérien*, *racine carrée*, *arcsin*, *arccos* et *arctan* sont continues sur leur domaine de définition. Et par *somme*, *produit*, *quotient* avec dénominateur non nul et *composition* des fonctions usuelles, la fonction obtenue est continue sur son domaine de définition.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq 0$ et $f(0,0) = 0$.
Continuité en $(x_0, y_0) \neq (0,0)$:
L'expression $\frac{x}{x^2+y^2}$ est une fraction de polynômes donc elle est continue en tout point (x_0, y_0) tel que le dénominateur $x_0^2 + y_0^2$ ne s'annule pas. Donc f est continue en tout point $(x_0, y_0) \neq (0,0)$.
Continuité en $(x_0, y_0) = (0,0)$:
• Calcul de $f(x,y)$ en coordonnées polaires $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, pour $r > 0$

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r\cos\theta}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r}.$$

Comme $\frac{1}{r} \underset{r\to 0}{\to} \infty$, on voit qu'on ne peut pas majorer $|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0,0)|$ uniformément en $\theta \in \mathbb{R}$ par une expression $g(r)$ qui tend vers 0 lorsque $r \to 0$.
• On montre alors que f n'est pas continue en $(0,0)$ sur un chemin particulier passant par ce point.

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f \circ \Phi(t) = f(t,0) = \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t} \underset{t\to 0}{\to} \infty.$$

La limite n'existe pas, donc $f \circ \Phi$ n'est pas continue en $t = 0$. Comme Φ est continue en $t = 0$, on en déduit par contraposée que f n'est pas continue en $M_0 = \Phi(0) = (0,0)$.

2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq 0$ et $f(0,0) = 0$.
Continuité en $(x_0, y_0) \neq (0,0)$:
L'expression $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ est une fraction de polynômes donc elle est continue en tout point (x_0, y_0) tel que le dénominateur $x_0^2 + y_0^2$ ne s'annule pas. Donc f est continue en tout point $(x_0, y_0) \neq (0,0)$.
Continuité en $(x_0, y_0) = (0,0)$:
• Calcul de $f(x,y)$ en coordonnées polaires $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, pour $r > 0$

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^2\cos^2\theta}{r^2} = \cos^2\theta.$$

Pour $\theta \neq \frac{\pi}{2}\text{mod}(\pi)$, on a $|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0,0)| = \cos^2\theta$ qui prend des valeurs constantes non nulles pour tout $r \in]0, +\infty[$. De plus, les valeurs de la fonction f ne dépendent pas de la variable r donc on ne peut pas majorer $|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0,0)|$ uniformément en $\theta \in \mathbb{R}$ par une expression $g(r)$ qui tend vers 0 lorsque $r \to 0$.
• On montre alors que f n'est pas continue en $(0,0)$ sur un chemin particulier passant par ce point.

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow f \circ \Phi(t) = f(t,t) = \frac{t^2}{t^2 + t^2} = \frac{1}{2} \underset{t\to 0}{\to} \frac{1}{2} \neq 0 = f \circ \Phi(0) = f(0,0).$$

La limite existe mais est différente de $f \circ \Phi(0)$, donc $f \circ \Phi$ n'est pas continue en $t = 0$. Comme Φ est continue en $t = 0$, on en déduit par contraposée que f n'est pas continue en $M_0 = \Phi(0) = (0,0)$.

3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq 0$ et $f(0,0) = 0$.
<u>Continuité en $(x_0, y_0) \neq (0,0)$:</u>
L'expression $\frac{x^3}{x^2+y^2}$ est une fraction de polynômes donc elle est continue en tout point (x_0, y_0) tel que le dénominateur $x_0^2 + y_0^2$ ne s'annule pas. Donc f est continue en tout point $(x_0, y_0) \neq (0,0)$.
<u>Continuité en $(x_0, y_0) = (0,0)$:</u>
• Calcul de $f(x,y)$ en coordonnées polaires $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, pour $r > 0$

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^3\cos^3\theta}{r^2} = r\cos^3\theta.$$

Par conséquent, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0,0)| = r\underbrace{|\cos^3\theta|}_{\leq 1} \leq r,$$

car $\operatorname{Im}\cos = [-1,1]$. On pose $g(r) = r$ qui vérifie $g(r) \underset{r\to 0}{\to} 0$. La condition suffisante de continuité en $(0,0)$ est démontrée.

4. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{y^2}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0,y) = 0$.
<u>Continuité en (x_0, y_0) pour tout $x_0 \neq 0$:</u>
L'expression $\frac{y^2}{x}$ est une fraction de polynômes donc elle est continue en tout point (x_0, y_0) tel que le dénominateur x_0 ne s'annule pas. Donc f est continue en tout point (x_0, y_0) tel que $x_0 \neq 0$.
<u>Continuité en $(0, y_0)$ pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$:</u>
• Calcul de $f(x,y)$ en coordonnées polaires $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, pour $r > 0$ et $\theta \neq \frac{\pi}{2}\mathrm{mod}(\pi)$

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^2\sin^2\theta}{r\cos\theta} = r\sin\theta\tan\theta.$$

Comme $\operatorname{Im}\tan = \mathbb{R}$ est non borné, on voit qu'on ne peut pas majorer $|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0,0)|$ uniformément en θ par une expression $g(r)$ qui tend vers 0 lorsque $r \to 0$.
• On montre alors que f n'est pas continue en $(0,0)$ sur un chemin particulier passant par ce point.
Pour $y_0 = 0$, on prend :

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow f \circ \Phi(t) = f(t^2, t) = \frac{t^2}{t^2} = 1 \underset{t\to 0}{\to} 1 \neq 0 = f \circ \Phi(0) = f(0,0).$$

La limite existe mais est différente de $f \circ \Phi(0)$, donc $f \circ \Phi$ n'est pas continue en $t = 0$. Comme Φ est continue en $t = 0$, on en déduit par contraposée que f n'est pas continue en $M_0 = \Phi(0) = (0,0)$.
Pour $y_0 \neq 0$, on prend

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} t \\ y_0 \end{pmatrix} \Rightarrow f \circ \Phi(t) = f(t, y_0) = \frac{y_0}{t^2} \underset{t\to 0}{\to} \infty.$$

La limite n'existe pas donc $f \circ \Phi$ n'est pas continue en $t = 0$. Comme Φ est continue en $t = 0$, on en déduit par contraposée que f n'est pas continue en $M_0 = \Phi(0) = (0, y_0)$.

5. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{1-\cos(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq 0$ et $f(0,0) = \frac{1}{2}$.

Continuité en $(x_0, y_0) \neq (0,0)$:

Par composition des fonctions *cosinus*, *racine carrée* avec un *polynôme* positif ou nul, l'expression $\cos(\sqrt{x^2+y^2})$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Le quotient $\frac{1-\cos(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}$ défini donc une fonction continue en tout point (x_0, y_0) tel que le dénominateur $x_0^2 + y_0^2$ ne s'annule pas. Donc f est continue en tout point $(x_0, y_0) \neq (0,0)$.

Continuité en $(x_0, y_0) = (0,0)$:

• Calcul de $f(x,y)$ en coordonnées polaires $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, pour $r > 0$

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{1-\cos r}{r^2} \underset{r\approx 0}{=} \frac{1-(1-\frac{r^2}{2}+r^2\varepsilon(r))}{r^2}, \qquad \text{avec } \varepsilon(r) \underset{r\to 0}{\to} 0$$

En simplifiant on a $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{1}{2} - \varepsilon(r)$. Par conséquent, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0,0)| = |\tfrac{1}{2} - \varepsilon(r) - \tfrac{1}{2}| = |\varepsilon(r)|,$$

On pose $g(r) = |\varepsilon(r)|$ qui vérifie $g(r) \underset{r\to 0}{\to} 0$. La condition suffisante de continuité en $(0,0)$ est démontrée.

6. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{1-\cos x}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq 0$ et $f(0,0) = \frac{1}{2}$.

Continuité en $(x_0, y_0) \neq (0,0)$:

L'expression $\frac{1-\cos(x)}{x^2+y^2}$ est un quotient de fonctions continues donc elle est continue en tout point (x_0, y_0) tel que le dénominateur $x_0^2 + y_0^2$ ne s'annule pas. Donc f est continue en tout point $(x_0, y_0) \neq (0,0)$.

Continuité en $(x_0, y_0) = (0,0)$:

• Calcul de $f(x,y)$ en coordonnées polaires $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{1-\cos(r\cos\theta)}{r^2} \underset{r\approx 0}{=} \frac{1-(1-\frac{(r\cos\theta)^2}{2}+r^2\varepsilon(r))}{r^2}, \qquad \text{avec } \varepsilon(r) \underset{r\to 0}{\to} 0$$

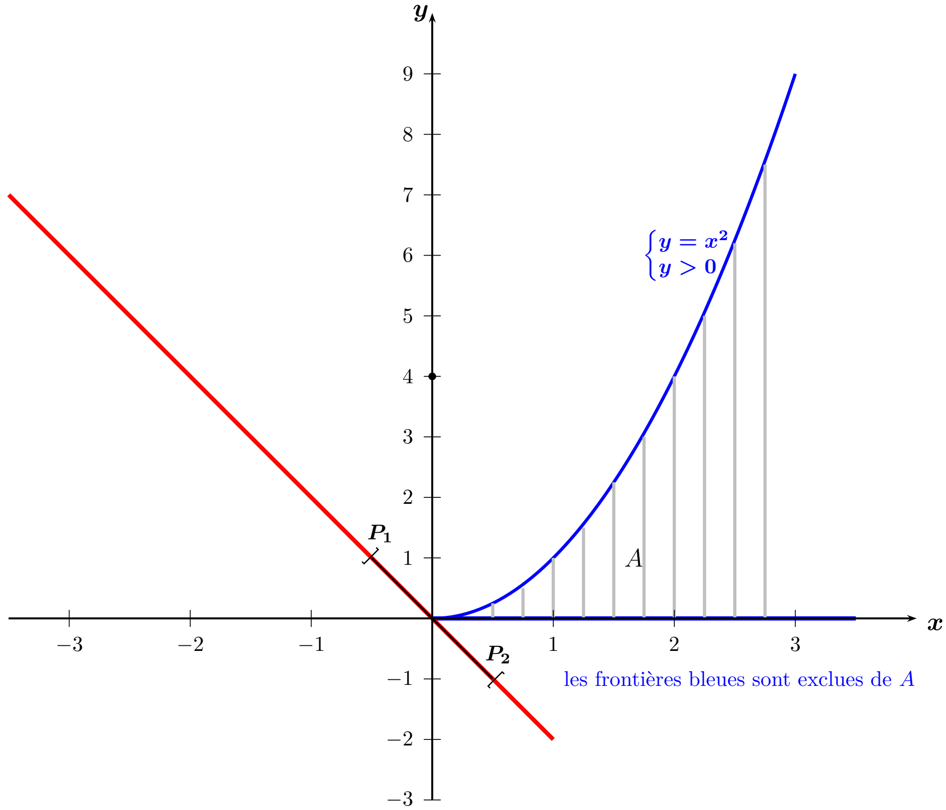
En simplifiant on a $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\cos^2\theta}{2} - \varepsilon(r)$. Comme à la question **2.**, on voit que pour différentes directions $\theta \neq 0 \bmod(\pi)$, la limite lorsque $r \to 0$ n'est pas $f(0,0) = \frac{1}{2}$.

• On montre alors que f n'est pas continue en $(0,0)$ sur un chemin particulier passant ce point.

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow f \circ \Phi(t) = f(0,t) = \frac{1-\cos 0}{t^2} = \frac{0}{t^2} = 0 \underset{t\to 0}{\to} 0 \neq \frac{1}{2} = f\circ\Phi(0) = f(0,0).$$

La limite existe mais est différente de $f \circ \Phi(0)$, donc $f \circ \Phi$ n'est pas continue en $t = 0$. Comme Φ est continue en $t = 0$, on en déduit par contraposée que f n'est pas continue en $M_0 = \Phi(0) = (0,0)$.

Exercice A.2.8 du poly. Soit $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0 \text{ et } 0 < y < x^2\}$.



1. Noter que

$$(x,y) \in A \Leftrightarrow x > 0 \text{ et } y > 0 \text{ et } y < x^2.$$

$$(x,y) \notin A \Leftrightarrow x \leq 0 \text{ ou } y \leq 0 \text{ ou } y \geq x^2.$$

Par intervalle, on entend un segment reliant deux point P_1 et P_2 dans le plan. Il est ouvert si on exclut les extrémités P_1 et P_2.

On distingue les cas $(x = 0)$ et $(y = ax)$ avec $a \in \mathbb{R}$.
• La droite d'équation $x = 0$ est incluse dans l'ensemble $\mathbb{R}^2 \backslash A$. Il s'agit de l'axe des ordonnées qui contient une infinité d'un intervalles ouverts $\{0\} \times] - \eta,\ +\eta[$, $\eta > 0$ centrés en l'origine.
•

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R}, & \text{si } a \leq 0 \\ x \leq a, & \text{si } a > 0. \end{cases}$$

Pour $a > 0$, l'ensemble $\big\{(x, ax) \in \mathbb{R}^2\,;\ x \in] - a, a[\big\}$ est un intervalle ouvert inclu dans l'ensemble $\mathbb{R}^2 \backslash A$:

$$a > 0 \text{ et } |x| < a \quad \Rightarrow \quad (x \leq 0) \text{ ou } (x > 0 \text{ et } x^2 < ax) \quad \Rightarrow \quad (x, ax) \notin A.$$

Pour $a \leq 0$, la droite d'équation $y = ax$ est incluse dans $\mathbb{R}^2 \backslash A$ et supporte une infinité d'intervalles ouverts $\big\{(x, ax) \in \mathbb{R}^2\,;\ x \in] - \eta, \eta[\big\}$, $\eta > 0$ centrés en l'origine :

$$a \leq 0 \text{ et } x \in] - \eta,\ +\eta[\quad \Rightarrow \quad (x \leq 0) \text{ ou } (x > 0 \text{ et } a \leq 0) \quad \Rightarrow \quad (x \leq 0) \text{ ou } (ax \leq 0) \quad \Rightarrow \quad (x, ax) \notin A$$

2. On définit la fonction $f;\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(x,y) = 0$ si $(x,y) \notin A$ et $f(x,y) = 1$ si $(x,y) \in A$.
(i) Soit $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose $g_h(t) = f(th) = f(th_1, th_2)$. On distingue les deux cas suivants :
• Soit $h_1 = 0$ et dans ce cas l'ensemble des points $\{(0, th_2); t \in \mathbb{R}\}$ s'identifie à la droite d'équation $x = 0$, elle même incluse dans $\mathbb{R}^2 \backslash A$. Cela signifie que $g_h(t) = 0$ pour tout t dans $\mathbb{R}$ donc g_h est continue en $t = 0$.
• Soit $h_1 \neq 0$ et dans ce cas l'ensemble des points $\{(th_1, th_2); t \in \mathbb{R}\}$ s'identifie à la droite d'équation $y = \frac{h_2}{h_1}x$. D'après la question **1.** il existe $\eta > 0$ (un voisinage) tel que

$$|t| < \eta \Rightarrow (th_1, th_2) \in \mathbb{R}^2 \backslash A \Rightarrow g_h(t) = 0.$$

Par conséquent, g_h est constante égale à 0 au voisinage de $t = 0$ donc elle y est continue.
<u>Conclusion :</u> Quel que soit $h \in \mathbb{R}^2$, la fonction g_h est continue en 0.

(ii) la fonction f n'est pas continue. Il suffit de choisir le chemin d'équation $y = \frac{x^2}{2}$ défini par

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix} \Rightarrow f \circ \Phi(t) = f(t, \tfrac{1}{2}t^2) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Les limites à gauche et à droite de $t = 0$ ne sont pas égales donc la fonction $f \circ \Phi$ n'est pas continue en $t = 0$. Comme Φ est continue en $t = 0$, on en déduit par contraposée que f n'est pas continue en $M_0 = \Phi(0)$.