Exercice A.2.9 du poly. *(Indication : utiliser les contraposées des liens logiques vus en cours pour répondre aux questions).*

2. $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

La fonction f est symétrique en les variables x et y : $f(x,y) = f(y,x)$.

(a) l'application f est continue en $(0,0)$. En effet, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^2 \sin\left(\frac{\cos\theta+\sin\theta}{r}\right).$$

Donc, $\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ |f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0,0)| = r^2 \underbrace{\left|\sin\left(\frac{\cos\theta+\sin\theta}{r}\right)\right|}_{\leq 1} \leq r^2$, car $\operatorname{Im}\sin = [-1,1]$. On pose $g(r) = r^2$ qui vérifie $g(r) \underset{r\to 0}{\to} 0$. La condition suffisante de continuité est vérifiée.

(b) • $\dfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \dfrac{h^2\sin(\frac{h+0}{h^2}) - 0}{h} = h\sin(\frac{1}{h}) \underset{h\to 0}{\to} 0$. Donc $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0}$.

• Par symétrie , $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0}$.

(c) On calcule $\varepsilon(h,k)$ tel que

$$f(0+h,0+k) = \underbrace{f(0,0)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}_{=0} \times h + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}_{=0} \times k + \sqrt{h^2+k^2}\,\varepsilon(h,k).$$

On a donc $\varepsilon(h,k) = \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sqrt{h^2+k^2}\sin\left(\frac{h+k}{h^2+k^2}\right)$.

On vérifie alors si $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$ ou non. Cela revient à étudier la continuité de la fonction ε en posant $\varepsilon(0,0) = 0$. On regarde l'expression en coordonnées polaires : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\varepsilon(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\sin\left(\frac{\cos\theta+\sin\theta}{r}\right).$$

Par conséquent, $\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ |\varepsilon(r\cos\theta, r\sin\theta) - 0| = r \underbrace{\left|\sin\left(\frac{\cos\theta+\sin\theta}{r}\right)\right|}_{\leq 1} \leq r$, car $\operatorname{Im}\sin = [-1,1]$. On pose $g(r) = r$ qui vérifie $g(r) \underset{r\to 0}{\to} 0$. La condition suffisante de continuité est vérifiée pour ε.

(d) On commence par calculer les dérivées partielles premières en tout point $(x,y) \neq (0,0)$.

• $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\right) + (x^2+y^2) \times \frac{(x^2+y^2)-2x(x+y)}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = 2x\sin\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) + \frac{y^2-2xy-x^2}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\right)$.

• Par symétrie, on obtient $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin\left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\right) + \dfrac{x^2-2xy-y^2}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\right)$.

Ensuite, on étudie la continuité en $(0,0)$ pour $\frac{\partial f}{\partial x}$. Par symétrie, le résultat sera le même pour $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Prenons le chemin d'équation $x = -y$ passant par l'origine. Il est décrit par la fonction $\Phi(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}$ avec $\Phi(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Φ est continue en 0 et

$$\frac{\partial f}{\partial x} \circ \Phi(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,-t) = 2t\sin(0) + \frac{-2t^2}{2t^2}\cos(0) = -1 \underset{t\to 0}{\to} -1 \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$

La limite existe mais est différente de $\frac{\partial f}{\partial x} \circ \Phi(0)$, donc $\frac{\partial f}{\partial x} \circ \Phi$ n'est pas continue en $t = 0$. Comme Φ est continue en $t = 0$, on en déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

3. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$

(a) l'application f n'est pas continue en $(0,0)$. En effet, pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, on a

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta)=\cos\theta\sin^2\theta.$$

Les limites ponctuelle diffèrent selon les directions $\theta\in\mathbb{R}$. On ne peut pas démontrer la condition suffisante de continuité.

Prenons le chemin d'équation $x=y$ passant par l'origine. Il est décrit par la fonction $\Phi(t)=\begin{pmatrix}t\\t\end{pmatrix}$ avec $\Phi(0)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Φ est continue en 0 et

$$f\circ\Phi(t)=f(t,t)=\frac{t^3}{(2t^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\underset{t\to0}{\to}\frac{1}{2\sqrt{2}}\neq f(0,0)=0.$$

La limite existe mais est différente de $f\circ\Phi(0)$, donc $f\circ\Phi$ n'est pas continue en $t=0$. Comme Φ est continue en $t=0$, on en déduit que f n'est pas continue en $(0,0)$.

(b) • $\dfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\dfrac{\frac{h\times0^2}{h^2}-0}{h}=0\underset{h\to0}{\to}0$. Donc $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0}$.

• $\dfrac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\dfrac{\frac{0\times k^2}{k^2}-0}{h}=0\underset{k\to0}{\to}0$. Donc $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0}$.

(c) Par contraposée, f n'est pas continue en $(0,0)$ donc f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

(d) Par contraposée, f n'est pas continue en $(0,0)$ donc aucune des dérivées partielles n'est continue en $(0,0)$. Vérification :

On commence par calculer les dérivées partielles premières en tout point $(x,y)\neq(0,0)$.

• $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y^2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}\times2x(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\times xy^2}{(x^2+y^2)^3}=\frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}(-2x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^3}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(0,t)=\frac{|t|t^4}{t^6}=\frac{1}{|t|}\underset{t\to0}{\to}\infty$.

• $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2xy(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}\times2y(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\times xy^2}{(x^2+y^2)^3}=\frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}(-xy^3+2yx^3)}{(x^2+y^2)^3}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(t,t)=\frac{\sqrt{2}|t|t^4}{8t^6}=\frac{\sqrt{2}}{8|t|}\underset{t\to0}{\to}\infty$.

4. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$

(a) l'application f est continue en $(0,0)$. En effet, pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, on a

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta)=r\cos^3\theta.$$

Donc, $\forall\ \theta\in\mathbb{R}$, $|f(r\cos\theta,r\sin\theta)-f(0,0)|=r\underbrace{|\cos^3\theta|}_{\leq1}\leq r$, car $\operatorname{Im}\cos=[-1,1]$. On pose $g(r)=r$ qui vérifie $g(r)\underset{r\to0}{\to}0$. La condition suffisante de continuité est vérifiée.

(b) • $\dfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\dfrac{\frac{h^3}{h^2}-0}{h}=1\underset{h\to0}{\to}1$. Donc $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1}$.

• $\dfrac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\dfrac{\frac{0^3}{k^2}-0}{h}=0\underset{k\to0}{\to}0$. Donc $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0}$.

(c) On calcule $\varepsilon(h,k)$ tel que

$$f(0+h,0+k)=\underbrace{f(0,0)}_{=0}+\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}_{=1}\times h+\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}_{=0}\times k+\sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k).$$

On a donc $\varepsilon(h,k) = \frac{f(h,k)-h}{\sqrt{h^2+k^2}} = -\frac{hk^2}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$.
Cette fonction a été étudiée à la question **3a)**. En posant $\varepsilon(0,0) = 0$, on sait que ε n'est pas continue en $(0,0)$. On en déduit que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

(d) Par contraposée, f n'est pas différentiable en $(0,0)$ donc aucune des dérivées partielles n'est continue en $(0,0)$.

5. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. La fonction f est symétrique en les variables x et y : $f(x,y) = f(y,x)$.

(a) l'application f est continue en $(0,0)$. En effet, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r.$$

Donc, $\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ |f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0,0)| = r$. On pose $g(r) = r$ qui vérifie $g(r) \underset{r\to 0}{\to} 0$. La condition suffisante de continuité est vérifiée.

(b) • $\dfrac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \dfrac{\sqrt{h^2} - 0}{h} = \frac{|h|}{h} \underset{h\to 0}{\to}$ pas de limite. Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'existe pas.

• Par symétrie, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ n'existe pas.

(c) Les nombres $A = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $B = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ n'existent pas donc la différentiabilité de f ne peut pas être démontrée.

(d) Les nombres $A = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $B = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ n'existent pas donc les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ ne sont pas définies en $(0,0)$. La continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ ne peut pas être démontrée.

Exercice hors poly. Fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
Montrer que la fonction définie par

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
(Indication : il faut démontrer la continuité des dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$).

Dérivées partielles en $(0,0)$ de p.
- $\dfrac{p(0+h,0)-p(0,0)}{h} = \dfrac{\frac{h\times 0^3}{h^4}-0}{h} = 0 \underset{h\to 0}{\to} 0$. Donc $\boxed{\dfrac{\partial p}{\partial x}(0,0)=0}$.
- $\dfrac{p(0,0+k)-p(0,0)}{k} = \dfrac{\frac{0\times k^3}{k^2}-0}{k} = 0 \underset{k\to 0}{\to} 0$. Donc $\boxed{\dfrac{\partial p}{\partial y}(0,0)=0}$.

Dérivées partielles en tout point $(x_0,y_0) \neq (0,0)$.
- $\frac{\partial p}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3(x^4+y^2)-4x^3\times xy^3}{(x^4+y^2)^2} = \frac{-3x^4y^3+y^5}{(x^4+y^2)^2}$
- $\frac{\partial p}{\partial y}(x,y) = \frac{3xy^2(x^4+y^2)-2y\times xy^3}{(x^4+y^2)^2} = \frac{xy^4+3x^5y^2}{(x^4+y^2)^2}$

Étude de la continuité des dérivées partielles premières.
- En tant que quotient de polynômes, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ en tout point (x_0,y_0) où le dénominateur ne s'annule pas, c'est à dire $(x_0,y_0) \neq (0,0)$.
- On majore l'écart en coordonnées cartésiennes pour commencer :

$$\left|\frac{\partial p}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial p}{\partial x}(0,0)\right| = \frac{|-3x^4y^3+y^5|}{x^8+2x^4y^2+y^4} \leq \frac{3x^4|y|^3}{x^8+2x^4y^2+y^4} + \frac{|y|^5}{x^8+2x^4y^2+y^4} \leq \frac{3x^4|y|^3}{2x^4y^2} + \frac{|y|^5}{y^4} = \frac{5}{2}|y|$$

On peut conclure en coordonnées polaires : $\forall\,\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\left|\frac{\partial p}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) - \frac{\partial p}{\partial x}(0,0)\right| \leq \frac{5}{2}r\underbrace{|\sin\theta|}_{\leq 1} \leq \frac{5}{2}r.$$

On pose $g(r) = \frac{5}{2}r$ qui vérifie $g(r) \underset{t\to 0}{\to} 0$. La condition suffisante de continuité est vérifiée par $\frac{\partial p}{\partial x}$ en $(0,0)$.
- On majore l'écart en coordonnées cartésiennes pour commencer :

$$\left|\frac{\partial p}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial p}{\partial y}(0,0)\right| = \frac{|xy^4+3x^5y^2|}{x^8+2x^4y^2+y^4} \leq \frac{|x|y^4}{x^8+2x^4y^2+y^4} + \frac{3|x|^5y^2}{x^8+2x^4y^2+y^4} \leq \frac{|x|y^4}{y^4} + \frac{3|x|^5y^2}{2x^4y^2} = \frac{5}{2}|x|$$

On peut conclure en coordonnées polaires : $\forall\,\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\left|\frac{\partial p}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) - \frac{\partial p}{\partial x}(0,0)\right| \leq \frac{5}{2}r\underbrace{|\cos\theta|}_{\leq 1} \leq \frac{5}{2}r.$$

On pose $g(r) = \frac{5}{2}r$ qui vérifie $g(r) \underset{t\to 0}{\to} 0$. La condition suffisante de continuité est vérifiée par $\frac{\partial p}{\partial y}$ en $(0,0)$.