Exercice A.2.17 du poly. Dérivées partielles secondes et Théorème de Schwarz

Soit $f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

1. On calcule les dérivées partielles en tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Dérivées partielles en $(0,0)$ de f.

- $\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{h\times 0\frac{h^2-0^2}{h^2}-0}{h} = 0 \underset{h\to 0}{\to} 0$. Donc $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0}$.
- $\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \frac{0\times k\frac{0^2-k^2}{k^2}-0}{k} = 0 \underset{k\to 0}{\to} 0$. Donc $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0}$.

Dérivées partielles en tout point $(x_0, y_0) \neq (0,0)$.

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$.
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{4y^2x^3}{(x^2+y^2)^2}$.

On posant $x = 0$, on a bien $\forall y \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$

On posant $y = 0$, on a bien $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$

2 • Par définition des dérivées partielles secondes par limite de taux d'accroissement, on a

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0+h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1},$$

et

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-k-0}{k} = -1}.$$

3. Les dérivées partielles secondes croisées ne sont pas égales en $(0,0)$. Cela signifie qu'elles ne sont pas continues en $(0,0)$.

Exercice A.2.18 du poly.

On rappelle que si f est de classe $\mathscr{C}^1$, la différentielle de f est notée

$$df_{(x,y)} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy.$$

1. L'expression est $(3x^2y - 2y^2)dx + (x^3 - 4xy + 6y^2)dy$ est la différentielle de f en (x,y) si

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y - 2y^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 - 4xy + 6y^2$$

Un peu d'intuition vous permet de voir que

$$f(x,y) = x^3y - 2xy^2 + 2y^3 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Plus généralement, on a

$$f(x,y) = \int \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx \quad \text{et} \quad f(x,y) = \int \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy.$$

2. Une condition nécessaire découle du théorème de symétrie de Schwarz.
Si $df_{(x,y)} = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$. Par conséquent :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y).$$

Dans la question précédente, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ puisqu'il s'agit d'un polynôme (donc au moins de classe $\mathscr{C}^2$) et on a bien

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 4y = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y).$$

Exercice hors poly. Recherche d'extrema locaux

1. Déterminer les points critiques des fonctions suivantes

(a) $f(x,y) = xy(1-x-y)$.

On utilise la condition nécéssaire d'optimalité $\nabla f(x_0,y_0) = 0$.

$$\left\{\begin{array}{l} y(1-x-y) - xy = 0 \\ y(1-x-y) - xy = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y(1-2x-y) = 0 \\ x(1-x-2y) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 0 \text{ ou } 1-2x-y = 0 \\ x = 0 \text{ ou } 1-x-2y = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ x = 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{c} y = 0 \\ 1-x-2y = 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{c} 1-2x-y = 0 \\ x = 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} 1-2x-y = 0 \\ 1-x-2y = 0 \end{array}\right.$$

On obtient alors 4 points critiques : $\boxed{(0,0),\ (1,0),\ (0,1) \text{ et } (\frac{1}{3},\frac{1}{3})}$.

(b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3\lambda xy$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

On utilise la condition nécéssaire d'optimalité $\nabla f(x_0,y_0) = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x^2 - 3\lambda y = 0 \\ 3y^2 - 3\lambda x = 0 \end{array}\right.$$

On distingue alors deux cas :

• Soit $\lambda = 0$ et on a un seul point critique $(0,0)$.

• Soit $\lambda \neq 0$ et on a

$$\left\{\begin{array}{c} y = \frac{x^2}{\lambda} \\ y^2 - \lambda x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y = \frac{x^2}{\lambda} \\ (\frac{x^2}{\lambda})^2 - \lambda x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y = \frac{x^2}{\lambda} \\ x(x^3 - \lambda^3) = 0 \end{array}\right.$$

Il y a deux points critiques : $\boxed{(0,0) \text{ et } (\lambda,\lambda)}$.

(c) $f(x,y) = x^2 - \cos(y)$.

On utilise la condition nécéssaire d'optimalité $\nabla f(x_0,y_0) = 0$:

$$\left\{\begin{array}{c} 2x = 0 \\ \sin y = 0 \end{array}\right.$$

On en déduit qu'il y a une infinité de points critiques du type $\boxed{(0,k\pi),\ k \in \mathbb{Z}}$.

2. Préciser leur nature (minimum ou maximum local, point selle).

(a) $f(x,y) = xy(1-x-y)$.

Comme la fonction est de classe $\mathscr{C}^2$, on applique la méthodologie utilisant le développement de Taylor-Young d'ordre 2. On calcule

$$a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2y, \quad b = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1 - 2x - 2y \text{ et } c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2x$$

• Si $(x_0,y_0) \in \{(0,0);(1,0);(0,1)\}$ alors $\Delta = b^2 - ac = 1 > 0$. Ce n'est pas un extremum local. Il s'agit d'un $\boxed{\text{point selle}}$.

• Si $(x_0,y_0) = (\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ alors $\Delta = b^2 - ac = (-\frac{1}{3})^2 - (-\frac{2}{3})(-\frac{2}{3}) = -\frac{1}{3} < 0$. Comme $a = -\frac{2}{3} < 0$, $f(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = \frac{1}{27}$ est un $\boxed{\text{maximum local}}$. Il n'est pas global car $f(-1,-1) = 3 > f(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

(b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3\lambda xy$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x, \quad b = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -3\lambda \text{ et } c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y.$$

• Si $(x_0, y_0) = (0,0)$ alors :
- soit $\lambda = 0$ et $\Delta = 0$, ce n'est pas un extremum local mais plutôt un point selle (le graphe contient des chemins du type $f(x,0) = x^3$).
soit $\lambda \neq 0$ et $\Delta = 9\lambda^2 > 0$, on a un point selle.
• Si $(x_0, y_0) = (\lambda, \lambda)$ avec $\lambda \neq 0$ alors $\Delta = -27\lambda^2 < 0$.
- Soit $\lambda < 0$ alors $a < 0$ et $f(\lambda, \lambda) = -2\lambda^3$ est un maximum local.
- Soit $\lambda > 0$ alors $a > 0$ et $f(\lambda, \lambda) = -2\lambda^3$ est un minimum local.

(c) $f(x,y) = x^2 - \cos(y)$.

$$a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2, \quad b = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0 \text{ et } c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \cos(y).$$

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $\Delta = -2\cos(2k\pi) = -2(-1)^k$. On en déduit que
- si k est pair alors $f(0, k\pi) = -1$ est un minimum local. Il s'agit d'un minimum global car $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) \geq -\cos(y) \geq -1$.
- si k est impair alors il s'agit d'un point selle. Sur le chemin définit par $z = f(x,0) = x^2$ on a un minimum global et sur le chemin définit par $z = f(0,y) = -\cos(y)$ on a maximum global au voisinage de $k\pi$.

Exercice A.2.23 du poly.

1. • Oui, la fonction f est continue en $(0,0)$:

$$\forall\,\theta \in [0, 2\pi[, \quad |f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0,0)| = r\big|(\cos(\theta+\sin\theta)\ln(r^2)\big| \leq 2r|\ln(r^2)| = g(r).$$

Comme $g(r) \underset{r\to 0}{\to} 0$, la C.S. de continuité est démontrée en $(0,0)$.
• L'expression $(x,y) \mapsto (x+y)\ln(x^2+y^2)$ définie une fonction continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0\}$ en que produit et composition de fonctions usuelles (polynôme et ln). La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \ln(x^2+y^2) + \frac{2x(x+y)}{x^2+y^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \ln(x^2+y^2) + \frac{2y(x+y)}{x^2+y^2}.$$

3. Pour $(x,y) \neq 0$, on résout la condition nécessaire d'optimalité

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcll} \ln(x^2+y^2) + \frac{2x(x+y)}{x^2+y^2} & = & 0 & (L_1) \\ \ln(x^2+y^2) + \frac{2y(x+y)}{x^2+y^2} & = & 0 & (L_2) \end{array}\right.$$

On suit l'indication d'étudier $L_1 - L_2$ pour en déduire

$$\frac{2x(x+y)}{x^2+y^2} - \frac{2y(x+y)}{x^2+y^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-y)(x+y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y \text{ ou } x = -y.$$

On vérifie si ces deux conditions satisfont le système initial :
• Si $x = y$ alors

$$\ln(2x^2) + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = e^{-2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{e\sqrt{2}}$$

Dans ce cas, f admet deux points critiques $(\frac{1}{e\sqrt{2}}, \frac{1}{e\sqrt{2}})$ et $(-\frac{1}{e\sqrt{2}}, -\frac{1}{e\sqrt{2}})$.

• Si $x = -y$ alors

$$\ln(2x^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dans ce cas, f admet deux autres points critiques $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ et $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

4. À finir.
On calcule les dérivées partielles secondes.

$$a(x,y) = \frac{\partial f}{x^2}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{(2(x+y)+2x)(x^2+y^2) - 4x^2(x+y)}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow a(x,x) = \frac{2}{x}$$
$$b(x,y) = \frac{\partial f}{x^2}(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2} + \frac{2x(x^2+y^2) - 4xy(x+y)}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow b(x,x) = 0$$
$$c(x,y) = \frac{\partial f}{x^2}(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2} + \frac{(2(x+y)+2y)(x^2+y^2) - 4y^2(x+y)}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow c(x,x) = \frac{2}{x}$$

• Pour $(\frac{1}{e\sqrt{2}}, \frac{1}{e\sqrt{2}})$, on a $\tilde{\Delta} = b^2 - ac = -8e^2 < 0$. Comme $a > 0$, il s'agit d'un minimum local.
• Pour $(-\frac{1}{e\sqrt{2}}, -\frac{1}{e\sqrt{2}})$, on a $\tilde{\Delta} = b^2 - ac = -8e^2 < 0$. Comme $a < 0$, il s'agit d'un maximum local.