**Exercice A.2.13 du poly.** Calcul de dérivées partielles pour 3 variables

**2.** $f(x,y) = \sin(x \sin y)$. Le domain de définition est $\mathbb{R}^2$. La fonction $f$ est infiniment différentiable sur son domaine de définition car composée de fonction usuelle.

$$df(x,y) = \sin(y)\cos(x\sin(y))dx + x\cos(y)\cos(x\sin y)dy.$$

**6.** $f(x,y,z) = \sin(x\sin(y\sin(z)))$. Le domain de définition est $\mathbb{R}^3$. La fonction $f$ est infiniment différentiable sur son domaine de définition car composée de fonctions usuelles.

$$\begin{aligned} df(x,y,z) = &\sin(y\sin(z))\cos(x\sin(y\sin(z)))dx \\ &+ x\sin(z)\cos(y\sin(z))\cos(x\sin(y\sin(z)))dy \\ &+ xy\cos(z)\cos(y\sin(z))\cos(x\sin(y\sin(z)))dz\ . \end{aligned}$$

**Exercice A.2.14 du poly.** Dérivées partielles de fonctions composées
Comme ce n'est pas indiqué, les fonctions sont considérée dérivable/différentiable sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$.

**1.** $F(x,y) = f(x+y)$.
• La fonction $f$ une fonction d'une variable dérivable.
• Par composition, la fonction $F$ est différentiable.

$$\begin{aligned} dF(x,y) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)dy \\ &= f'(x+y)dx + f'(x+y)dy = f'(x+y)[dx+dy]. \end{aligned}$$

**2.** $F(x,y) = f(g(x)k(y), g(x)+h(y))$.
• La fonction $f$ est une fonction de deux variables (disons $u$ et $v$) différentiable.
• Les fonctions $g$, $h$ et $k$ sont trois fonctions d'une variable dérivable.
• Par composition, somme et produit, la fonction $F$ est différentiable.

$$\begin{aligned} dF(x,y) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)dy \\ &= \left[g'(x)k(y)\frac{\partial f}{\partial u}(g(x)k(y), g(x)+h(y)) + g'(x)\frac{\partial f}{\partial v}(g(x)k(y), g(x)+h(y))\right] dx \\ &\quad + \left[g(x)k'(y)\frac{\partial f}{\partial u}(g(x)k(y), g(x)+h(y)) + h'(y)\frac{\partial f}{\partial v}(g(x)k(y), g(x)+h(y))\right] dy\ . \end{aligned}$$

**3.** $F(x,y,z) = f(g(x+y), h(y+z))$.
• La fonction $f$ est une fonction de deux variables (disons $u$ et $v$) différentiable.
• Les fonctions $g$ et $h$ sont deux fonctions d'une variable dérivable.
• Par composition, la fonction $F$ est différentiable.

$$\begin{aligned} dF(x,y,z) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)dy + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)dz \\ &= g'(x+y)\frac{\partial f}{\partial u}(g(x+y), h(y+z))dx \\ &\quad + \left(g'(x+y)\frac{\partial f}{\partial u}(g(x+y), h(y+z)) + h'(y+z)\frac{\partial f}{\partial v}(g(x+y), h(y+z))\right) dy \\ &\quad + h'(y+z)\frac{\partial f}{\partial v}(g(x+y), h(y+z))dz\ . \end{aligned}$$