Exercice A.2.5. Potentiel scalaire

Le champ de vecteur $V:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}^3$ est défini par

$$V(x,y,z)=\begin{pmatrix}\frac{x}{1+x^2+y^2+z^2}\\ \frac{y}{1+x^2+y^2+z^2}+\beta y^2 z\\ \frac{\alpha z}{1+x^2+y^2+z^2}+\beta\frac{y^3}{3}\end{pmatrix}.$$

1. L'application V est de classe $\mathscr{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R}^3$.

On calcule en tout point $M(x,y,z)$ le rotationnel de V :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}V(M)=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\frac{x}{1+x^2+y^2+z^2}\\ \frac{y}{1+x^2+y^2+z^2}+\beta y^2 z\\ \frac{\alpha z}{1+x^2+y^2+z^2}+\beta\frac{y^3}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2\alpha zy}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}+\beta y^2-(-\frac{2yz}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}+\beta y^2)\\ -\frac{2xz}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}-(\frac{2\alpha zx}{(1+x^2+y^2+z^2)^2})\\ -\frac{2yx}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}-(-\frac{2xy}{(1+x^2+y^2+z^2)^2})\end{pmatrix}$$
$$=(\alpha-1)\begin{pmatrix}-\frac{2zy}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}\\ \frac{2xz}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}\\ 0\end{pmatrix}.$$

On conclut que

$$\left(\forall\, M(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}V(M)=\overrightarrow{0}\right)\quad\Leftrightarrow\quad\alpha=1.$$

2. D'après un théorème du cours, on en déduit qu'il existe une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$ telle que $V=\nabla f$. C'est la définition d'un champ de vecteur V qui dérive d'un potentiel scalaire f.

On déterminer ce potentiel f par intégrations partielles successives.

(i) On pose le système

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{x}{1+x^2+y^2+z^2} & L_1\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{y}{1+x^2+y^2+z^2}+\beta y^2 z & L_2\\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{z}{1+x^2+y^2+z^2}+\beta\frac{y^3}{3}. & L_3\end{cases}$$

On commence par intégrer L_1 par rapport à x pour chercher la forme générale de l'expression de f

$$f(x,y,z)=\int\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)dx=\int\frac{x}{1+x^2+y^2+z^2}dx=\frac{1}{2}\ln(1+x^2+y^2+z^2)+C_1(y,z).$$

(ii) Ensuite on essaie de trouver la forme générale de l'expression de la fonction C_1 par identification avec L_2 :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\frac{y}{1+x^2+y^2+z^2}+\frac{\partial C_1}{\partial y}(y,z).$$

En comparant avec L_2 on obtient

$$\frac{\partial C_1}{\partial y}(y,z)=\beta y^2 z\quad\Rightarrow\quad C_1(y,z)=\int\frac{\partial C_1}{\partial y}(y,z)dy=\frac{y^3 z}{3}+C_2(z).$$

Bilan :

$$f(x,y,z)=\frac{1}{2}\ln(1+x^2+y^2+z^2)+\frac{y^3 z}{3}+C_2(z).$$

(iii) On détermine la forme générale de l'expression de C_2 par identification avec L_3 :

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\frac{z}{1+x^2+y^2+z^2}+\beta\frac{y^3}{3}+C_2'(z)\quad\Rightarrow\quad C_2'(z)=0\quad\Rightarrow\quad C_2(z)=K,\quad K\in\mathbb{R}.$$

Conclusion : $\boxed{f(x,y,z)=\frac{1}{2}\ln(1+x^2+y^2+z^2)+\frac{y^3 z}{3}+K}$, $K\in\mathbb{R}$.

Exercice A.2.7 : Potentiels scalaires
On considère le champ de vecteurs suivant

$$\begin{aligned} V : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ M &\mapsto V(M) = \begin{pmatrix} 2y+z \\ 2x+z \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1. Les composantes du champs de vecteurs V sont polynomiales donc le champs de vecteurs V est continûment différentiable. D'après le théorème II.4.2 page 18, il faut montrer ici que le champ de vecteur V est de divergence nulle. On calcule

$$\operatorname{div} V(M) = \frac{\partial V_x}{\partial x}(M) + \frac{\partial V_y}{\partial y}(M) + \frac{\partial V_z}{\partial z}(M) = 0+0+0 = 0.$$

On en déduit que V dérive d'un potentiel vecteur ce qui signifie qu'il existe un champ de vecteurs $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tel que $V = \mathbf{rot}\, A$.

2. On veut résoudre l'équation différentielle $V = \mathbf{rot}\, A$ où est A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} x(2z-y) \\ y\phi(x,z) \\ z\psi(x,y) \end{pmatrix}$$

et ϕ et ψ sont des champs scalaires de deux variables. On calcule $\mathbf{rot}\, A$:

$$\mathbf{rot}\, A(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x(2z-y) \\ y\phi(x,z) \\ z\psi(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial\phi}{\partial z}(x,z) \\ 2x - z\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y) \\ y\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,z) + x \end{pmatrix}.$$

On doit donc résoudre le système suivant

$$\begin{cases} z\frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial\phi}{\partial z}(x,z) = 2y+z \\ 2x - z\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y) = 2x+z \\ y\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,z) + x = x+y \end{cases}, \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

On commence par déterminer partiellement ϕ et ψ en intégrant les deux dernières égalités par rapport à x. Après simplification, on a

- $\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y) = -1, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,
- $\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,z) = 1, \quad \forall (x,z) \in \mathbb{R}^2$.

Ce qui donne

- $\psi(x,y) = -x + C_1(y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,
- $\phi(x,z) = x + C_2(z), \quad \forall (x,z) \in \mathbb{R}^2$,

où les fonctions C_1 et C_2 seront déterminées à l'aide de la troisième égalites du système ci-dessus.
En remplaçant ϕ et ψ par leurs expressions dans la troisième égalité on obtient

$$zC_1'(y) - yC_2'(z) = 2y+z, \quad \forall (y,z) \in \mathbb{R}^2.$$

On réarrange cette égalité de la façon suivante :

$$z(C_1'(y) - 1) = y(C_2'(z) + 2), \quad \forall (y,z) \in \mathbb{R}^2.$$

Ce qui se réécrit
$$\frac{C_1'(y)-1}{y} = \frac{C_2'(z)+2}{z}\,, \quad \forall (y,z)\in\mathbb{R}^2\,.$$
On en déduit que ces deux quantités ne dépendent ni y, ni de z et qu'elles sont donc constantes ($=\lambda_1$ avec $\lambda_1\in\mathbb{R}$). On a alors
$$\begin{cases} C_1'(y)-1=\lambda_1 y \\ C_2'(z)+2=\lambda_1 z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(y)=y+\lambda_1\frac{y^2}{2}+\lambda_2 \\ C_2(z)=-2z+\lambda_1\frac{z^2}{2}+\lambda_3 \end{cases}, \quad \text{avec } \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}\,.$$
<u>Conclusion</u> : On a
$$\begin{cases} \psi(x,y)=-x+y+\lambda_1\frac{y^2}{2}+\lambda_2\,, \\ \phi(x,z)=x-2z+\lambda_1\frac{z^2}{2}+\lambda_3\,. \end{cases}$$
3. La condition supplémentaire $\operatorname{div} A=0$ va nous permettre d'obtenir des conditions supplémentaires sur les constantes. On a
$$\operatorname{div} A(M)=(2z-y)+\phi(x,z)+\psi(x,y)=\lambda_1\left(\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}\right)+\lambda_2+\lambda_3=0\,, \quad \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,.$$
Ce qui implique $\lambda_1=0$ et $\lambda_2=-\lambda_3$.
<u>Conclusion</u> : On a finalement
$$A(M)=\begin{pmatrix} x(2z-y) \\ y(x-2z+C) \\ z(y-x-C) \end{pmatrix}, \quad C\in\mathbb{R}\,.$$
Pour aller plus loin,
$$\operatorname{div}\vec{A}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\,\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ \vec{A}=\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{F}.$$
Vérifiez que
$$\vec{F}=\begin{pmatrix} xyz+Cyz \\ xyz \\ 2xyz \end{pmatrix}$$
est une solution.