Exercice A.2.5. Équations de plans

1. $\mathscr{P}$ est le plan perpendiculaire à la direction $\vec{n} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0\}$ et passant par le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Equation cartésienne implicite : On utilise la caractérisation

$$M \in \mathscr{P} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$$

On obtient l'équation implicite

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}.$$

2. $\mathscr{P}$ est le plan parallèle aux directions $\vec{u}_1 = (a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{R}^3$ et $\vec{u}_2 = (a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^3$ et passant par le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$.
Les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont bien-entendu non colinéaires et $(M_0, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est un repère (non nécessairement orthonormé) du plan $\mathscr{P}$.

Equation cartésienne implicite : Comme les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont supposés non colinéaires, le produit vectoriel fourni un vecteur orthogonal $\vec{n}$ non nul et

$$\vec{n} = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on procède comme à la question 1 et on obtient

$$\boxed{(b_2c_3 - b_3c_2)(x - x_0) + (b_3c_1 - b_1c_3)(y - y_0) + (b_1c_2 - b_2c_1)(z - z_0) = 0}$$

Application : $M_0(3, 1, 0)$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$.

On trouve $\boxed{4(x - 1) - 5(y - 1) - 6z = 0}$ ou $\boxed{4x - 5y - 6z = 7}$

Exercice A.2.7. Courbes de l'espace

1.

(1) Le système $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ z=3 \end{array}\right.$ caractérise l'intersection d'un cylindre de révolution autour de l'axe (Oz) avec le plan horizontal d'équation $z=3$. Graphiquement, on obtient le cercle $\mathcal{C}_1$ de couleur rouge ci-dessous. Une paramétrisation de ce cercle est

$$M(x,y,z)\in\mathcal{C}_1 \Longleftrightarrow \exists\,\theta\in[0;2\pi[\ ,\ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\Phi(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 3\end{pmatrix}\ .$$

(2) Le système $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x+y+z=1 \end{array}\right.$ caractérise l'intersection d'un cylindre de révolution autour de l'axe (Oz) avec le plan oblique d'équation $x+y+z=1$. Graphiquement, on obtient la courbe $\mathcal{C}_2$ de couleur bleue ci-dessous.

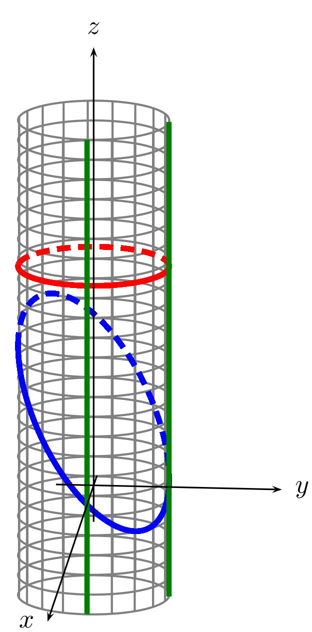
Une paramétrisation de cette courbe est

$$M(x,y,z)\in\mathcal{C}_2 \Longleftrightarrow \exists\,\theta\in[0;2\pi[\ ,\ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\Phi(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 1-\cos\theta-\sin\theta\end{pmatrix}\ .$$

(3) Le système $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x+y=1 \end{array}\right.$ caractérise l'intersection d'un cylindre de révolution autour de l'axe (Oz) avec le plan vertical d'équation $x+y=1$. Il suffit de résoudre ce système de deux équations à deux inconnues. Graphiquement, on obtient la courbe $\mathcal{C}_3$ de couleur verte ci-dessous, constituée de droites verticales d'équations $\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=0 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=1 \end{array}\right.$.

Une paramétrisation de cette courbe est

$$M(x,y,z)\in\mathcal{C}_3 \Longleftrightarrow \exists\,t\in\mathbb{R}\ ,\ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\Phi_1(t)=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ t\end{pmatrix}\ \text{ou}\ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\Psi(t)=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ t\end{pmatrix}\ .$$

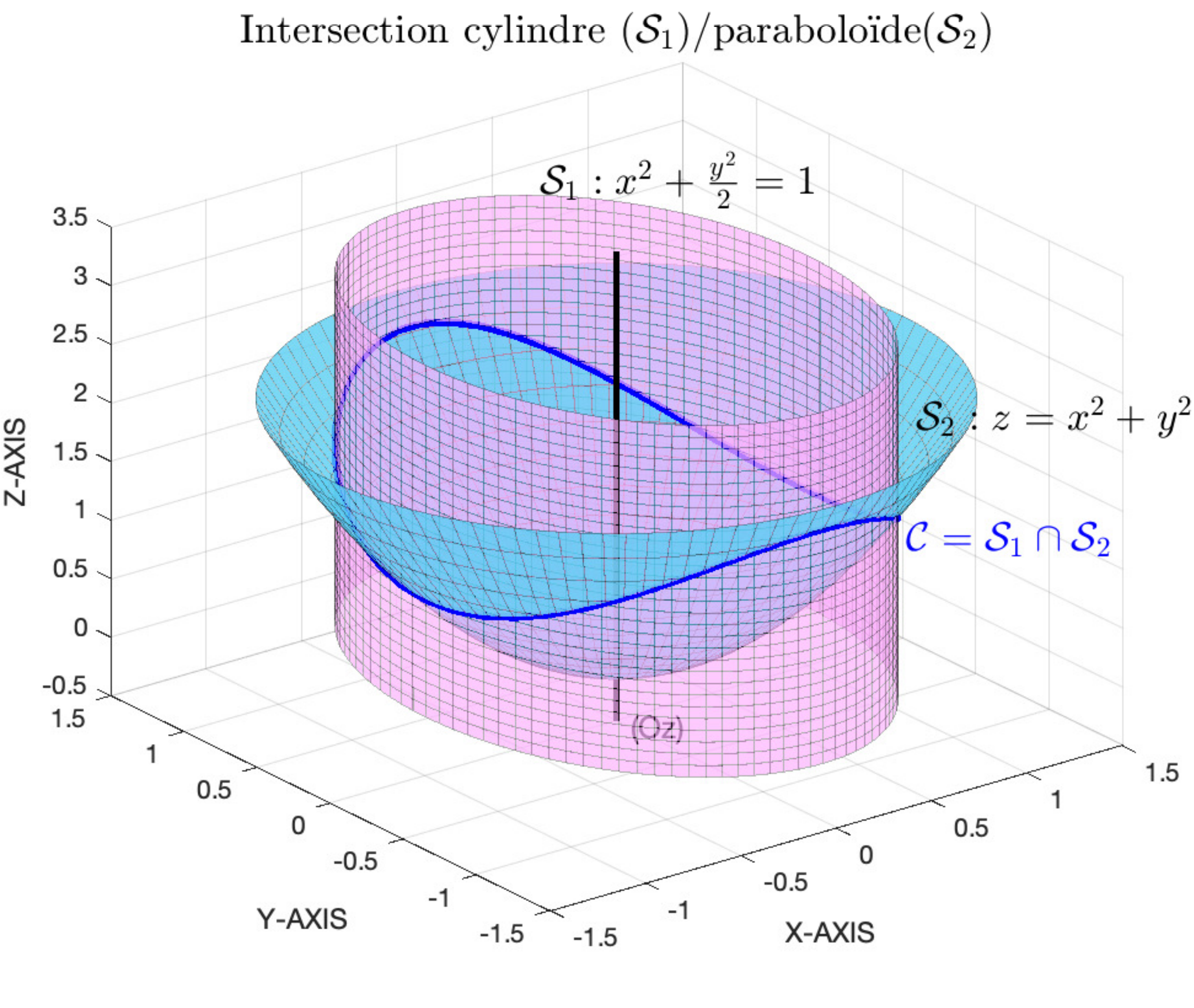


2. Le système $\left\{\begin{array}{l} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1 \end{array}\right.$ caractérise l'intersection d'un paraboloïde de révolution autour de l'axe (Oz) avec un cylindre elliptique centré en l'origine, d'axe (Oz) et demi-axes de longueur $a = 1$ et $b = \sqrt{2}$. Graphiquement, on obtient la courbe $\mathcal{C}_4$ de couleur rouge ci-dessous.

$$\left\{\begin{array}{l} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = 2 - x^2 \\ x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = 1 + \frac{1}{2}y^2 \\ x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1 \end{array}\right.$$

Une paramétrisation de cette courbe est

$$M(x,y,z) \in \mathcal{C}_4 \Longleftrightarrow \exists\, \theta \in [0; 2\pi[\ ,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sqrt{2}\sin\theta \\ 2 - \cos^2\theta = 1 + \sin^2\theta \end{pmatrix} .$$



Un vecteur tangent à la droite tangente $\mathcal{T}$ à cette courbe au point $M(x_0 = x(\theta_0)\,, y_0 = y(\theta_0)\,, z_0 = z(\theta_0))$

est

$$\Phi'(\theta_0) = \begin{pmatrix} -\sin\theta_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}y_0 \\ \sqrt{2}\cos\theta_0 = \sqrt{2}x_0 \\ 2\cos\theta_0\sin\theta_0 = \sqrt{2}x_0y_0 \end{pmatrix} \ .$$

La droite tangente $\mathcal{T}$ est donc paramétrée par

$$M(x,y,z)\in\mathcal{T} \Longleftrightarrow \exists\, t\in\mathbb{R}\ ,\ M = M_0 + t\Phi'(\theta_0) \Longleftrightarrow \exists\, t\in\mathbb{R}\ ,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 - t\sin\theta_0 = x_0 - t\frac{y_0}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2}(\sin\theta_0 + t\cos\theta_0) = y_0 + tx_0\sqrt{2} \\ 1+\sin^2\theta_0 + t\sin 2\theta_0 = z_0 + tx_0y_0\sqrt{2} \end{pmatrix} \ .$$

Chapitre 3. Exercice A.2.6 Surfaces de $\mathbb{R}^3$

Exemple : **(1)** $x^2 + \alpha y^2 + z^2 = 1$.

• Si $\alpha > 0$, on réécrit l'équation $x^2 + \frac{y^2}{(\sqrt{\frac{1}{\alpha}})^2} + z^2 = 1$. C'est un ellipsoïde centré èn l'origine d'axes dirigés selon les direction (Ox), (Oy), (Oz) et de demi-axes de longueurs 1, $\sqrt{\frac{1}{\alpha}}$ et 1 respectivement. Une paramétrisation possible est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sqrt{\frac{1}{\alpha}}\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} , \theta \in [0;\pi],\ \varphi \in [0;2\pi] .$$

• si $\alpha = 0$, on obtient l'équation $x^2 + z^2 = 0$. Cela ressemble à l'équation du cylindre. La variable y n'apparaît pas. C'est un cylindre infini de révolution autour de l'axe (Oy) de rayon 1. Une paramétrisation est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ y \\ \sin\varphi \end{pmatrix} , y \in \mathbb{R},\ \varphi \in [0;2\pi] .$$

• Si $\alpha < 0$, on réécrit l'équation $x^2 - \frac{y^2}{(\sqrt{-\frac{1}{\alpha}})^2} + z^2 = 1$. Cela ressemble à l'équation de l'hyperboloïde à une nappe avec cette fois un signe moins devant y^2. C'est un hyperboloïde à une nappe de révolution autour de l'axe (Oy). Une paramétrisation possible s'obtient en réécrivant l'équation sous la forme

$$x^2 + z^2 = \underbrace{\left(\sqrt{1 - \alpha y^2}\right)^2}_{R^2}$$

puis en utilisant les coordonnées cylindriques :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \alpha y^2}\cos\varphi \\ y \\ \sqrt{1 - \alpha y^2}\sin\varphi \end{pmatrix} , y \in \mathbb{R},\ \varphi \in [0;2\pi] .$$

(2) $-2x^2 + y^2 + z^2 = \alpha$.

• Si $\alpha > 0$, on réécrit l'équation $-\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{\alpha}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{\alpha}}\right)^2 = 1$. C'est un hyperboloïde à une nappe de révolution autour de l'axe (Ox). En écrivant $y^2 + z^2 = \left(\sqrt{\alpha + 2x^2}\right)^2$, une paramétrisation possible est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{\alpha + 2x^2}\cos\varphi \\ \sqrt{\alpha + 2x^2}\sin\varphi \end{pmatrix} , x \in \mathbb{R},\ \varphi \in [0;2\pi] .$$

• si $\alpha = 0$, on réécrit l'équation $x^2 = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2$.C'est un cône de révolution autour de l'axe (Ox). En écrivant $y^2 + z^2 = (\sqrt{2}|x|)^2$, une paramétrisation est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{2}|x|\cos\varphi \\ \sqrt{2}|x|\sin\varphi \end{pmatrix} , x \in \mathbb{R} ,\ \varphi \in [0;2\pi] .$$

• Si $\alpha < 0$, on réécrit l'équation $\left(\frac{x}{\sqrt{-\frac{\alpha}{2}}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{-\alpha}}\right)^2 - \left(\frac{z}{\sqrt{-\alpha}}\right)^2 = 1$. C'est un hyperboloïde à deux nappes de révolution autour de l'axe (Ox). Une paramétrisation possible est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{\alpha + 2x^2}\cos\varphi \\ \sqrt{\alpha + 2x^2}\sin\varphi \end{pmatrix} \;,\; x \in \left]-\infty; -\sqrt{-\frac{\alpha}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{-\frac{\alpha}{2}}; +\infty\right[\;,\; \varphi \in [0; 2\pi] \;.$$

Chapitre 3. Exercice A.2.8 Courbes et intersection de surfaces de $\mathbb{R}^3$
On considère deux surfaces de $\mathbb{R}^3$ définies par les paramétrisations suivantes :

$$\mathcal{S}_1 := \left\{ M\begin{pmatrix} u+v+\frac{1}{3} \\ u-2v+\frac{1}{3} \\ -2u+v+\frac{1}{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; u,v \in \mathbb{R} \right\} ,$$

$$\mathcal{S}_2 := \left\{ M\begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2+v^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; u,v \in \mathbb{R} \right\} .$$

1. • La surface $\mathcal{S}_1$ est un plan d'équation $x+y+z=1$.
• La surface $\mathcal{S}_2$ est un paraboloïde de révolution autour de l'axe (Oz) d'équation $z=x^2+y^2$.
2. (a) • En utilisant la paramétrisation, on applique la formule du théorème III.5.1 page 25 pour trouver un vecteur normal $\overrightarrow{N_2}$ à la surface $\mathcal{S}_2$ au point $M_2(x_0=u_0\,,\, y_0=v_0\,,\, z_0=u_0^2+v_0^2)$. On doit commencer par calculer les vecteurs tangents à la surface.

$$\overrightarrow{T_1} = \frac{\partial\overrightarrow{OM_2}}{\partial u}(u_0,v_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u_0 \end{pmatrix} \text{ and } \overrightarrow{T_2} = \frac{\partial\overrightarrow{OM_2}}{\partial v}(u_0,v_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v_0 \end{pmatrix}$$

Ces deux vecteurs ne s'annulent jamais et ne sont pas colinéaires. On a

$$\overrightarrow{N_2} = \overrightarrow{T_1} \wedge \overrightarrow{T_2} = \begin{pmatrix} -2u_0 \\ -2v_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_0 \\ -2y_0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

On remarque que l'on retrouve le résultat précédent en repassant en coordonnées cartésiennes. Ce n'est pas toujours le cas, souvent on trouve un vecteur normal différent mais colinéaire au précédent.
• Une équation du plan tangent Π_2 à $\mathcal{S}_2$ au point $M_2(x_0,y_0,z_0)$ est donnée par la formule

$$M(x,y,z) \in \Pi_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{N_2}\cdot\overrightarrow{M_2M} = 0 \Leftrightarrow (z-z_0) = 2x_0(x-x_0) + 2y_0(y-y_0) .$$

(b) On suppose $M_2 \in (\mathcal{C} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2)$. Soit Π_1 le plan tangent à la surface $\mathcal{S}_1$ au point M_2.
Un vecteur tangent $\overrightarrow{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point M_2 appartient à l'intersection des deux plans tangents Π_1 et Π_2 (déterminé précédemment). Autrement dit, ce vecteur tangent est orthogonal aux deux vecteurs normaux aux plans tangents Π_1 et Π_2. Inversement, soient $\overrightarrow{N_1}$ un vecteur normal à Π_1 et $\overrightarrow{N_2}$ un vecteur normal à Π_2, alors $\overrightarrow{T} = \overrightarrow{N_1} \wedge \overrightarrow{N_2}$ est tangent à la courbe $\mathcal{C}$ au point M_2.
• On a déjà déterminé $\overrightarrow{N_2}$.
• Étant donné un plan $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation $ax+by+cz=d$ où a,b,c,d sont connus, le plan tangent en tout point $M_0(x_0,y_0,z_0)$ du plan $\mathcal{P}$ est défini par l'équation $a(x-x_0)+b(x-x_0)+c(x-x_0)=0$ et un vecteur normal à ce plan tangent est $\overrightarrow{N_0} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

On en déduit que $\overrightarrow{N_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal à Π_1.

• On applique la formule pour trouver $\overrightarrow{T}$:

$$\overrightarrow{T} = \overrightarrow{N_1} \wedge \overrightarrow{N_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2x_0 \\ -2y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2y_0 \\ -2x_0-1 \\ 2x_0-2y_0 \end{pmatrix} .$$

• L'équation de la droite $\mathcal{T}$ tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $M_2(x_0, y_0, z_0)$ est caractérisée par

$$M(x,y,z) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \exists\, t \in \mathbb{R},\ M = M_2 + t\overrightarrow{T} \Leftrightarrow \exists\, t \in \mathbb{R},\ \left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + t(1+2y_0)\,, \\ y = y_0 - t(1+2x_0)\,, \\ z = z_0 + 2t(x_0 - y_0)\,. \end{array} \right.$$

3. On reprend les equations implicites des surfaces $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$. On a

$$M(x,y,z) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ z = x^2+y^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 1-x-y = x^2+y^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=1 \to \text{ plan} \\ (x+\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{2} \to \text{ cylindre} \end{array} \right.$$

La première équation définit un plan qui est la surface $\mathcal{S}_1$. La seconde équation définit un cylindre de révolution autour de l'axe parrallèle à (Oz) passant par le point de coordonnées $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$ et de rayon $\sqrt{\frac{3}{2}}$.
• On peut alors paramétrer la courbe $\mathcal{C}$ en s'inspirant de la paramétrisation d'un cylindre :

$$M(x,y,z) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \exists \theta \in [0, 2\pi[\,,\ \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}}\cos\theta\,, \\ y = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta\,, \\ z = 1 - x - y = 2 - \sqrt{\frac{3}{2}}(\cos\theta + \sin\theta)\,. \end{array} \right.$$

Dans le cas particulier d'un cylindre elliptique $C_{(0,0)}$ d'axe (Oz), centré à l'origine et de demi-axes de longueurs a et b, l'équation implicite est $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ et une paramétrisation est $(a\cos\theta, b\sin\theta, z)$ avec $\theta \in [0; 2\pi[$ et $z \in \mathbb{R}$.
Dans le cas plus général du cylindre elliptique $C_{(\alpha,\beta)}$ centré au point de coordonnées $(\alpha\,, \beta\,, 0)$, on doit effectuer un changement de variable $x' = x - \alpha$, $y' = y - \beta$, $z' = z$. On a donc

$$M(x,y,z) \in C_{(\alpha,\beta)} \Leftrightarrow M'(x', y', z') \in C_{(0,0)}\,.$$

L'équation implicite de $C_{(\alpha,\beta)}$ est $\left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x-\alpha}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-\beta}{b}\right)^2 = 1$.
Si $a = b = R$, on réécrit cette équation $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$ et on dit que $C_{(\alpha,\beta)}$ est un cylindre de révolution autour de l'axe parrallèle à (Oz) passant par le point de coordonnées $(\alpha, \beta, 0)$.
Pour obtenir une paramétrisation de $C_{(\alpha,\beta)}$ on cherche une paramétrisation de $C_{(0,0)}$ pour les points $M'(x', y', z')$ et on fait le changement de variable inverse $x = x' + \alpha$, $y = y' + \beta$, $z = z'$. On obtient $(a\cos\theta + \alpha, b\sin\theta + \beta, z)$ avec $\theta \in [0; 2\pi[$ et $z \in \mathbb{R}$.

Un vecteur tangent $\overrightarrow{T'}$ à la courbe $\mathcal{C}$ en $M_2(x_0, y_0, z_0)$ est obtenu en dérivant chaque coordonnée par rapport à θ. On obtient

$$\overrightarrow{T'} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta_0 \\ \sqrt{\frac{3}{2}}\cos\theta_0 \\ \sqrt{\frac{3}{2}}(\sin\theta_0 - \cos\theta_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_0 - \frac{1}{2} \\ x_0 + \frac{1}{2} \\ y_0 - x_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{T}\,.$$