Chapitre 3. Exercice A.2.6 Surfaces de $\mathbb{R}^3$

Exemple : **(1)** $x^2 + \alpha y^2 + z^2 = 1$.

• Si $\alpha > 0$, on réécrit l'équation $x^2 + \frac{y^2}{(\sqrt{\frac{1}{\alpha}})^2} + z^2 = 1$. C'est un ellipsoïde centré èn l'origine d'axes dirigés selon les direction (Ox), (Oy), (Oz) et de demi-axes de longueurs 1, $\sqrt{\frac{1}{\alpha}}$ et 1 respectivement. Une paramétrisation possible est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sqrt{\frac{1}{\alpha}}\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} ,\theta \in [0;\pi],\ \varphi \in [0;2\pi] .$$

• si $\alpha = 0$, on obtient l'équation $x^2 + z^2 = 0$. Cela ressemble à l'équation du cylindre. La variable y n'apparaît pas. C'est un cylindre infini de révolution autour de l'axe (Oy) de rayon 1. Une paramétrisation est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ y \\ \sin\varphi \end{pmatrix} ,y \in \mathbb{R},\ \varphi \in [0;2\pi] .$$

• Si $\alpha < 0$, on réécrit l'équation $x^2 - \frac{y^2}{(\sqrt{-\frac{1}{\alpha}})^2} + z^2 = 1$. Cela ressemble à l'équation de l'hyperboloïde à une nappe avec cette fois un signe moins devant y^2. C'est un hyperboloïde à une nappe de révolution autour de l'axe (Oy). Une paramétrisation possible s'obtient en réécrivant l'équation sous la forme

$$x^2 + z^2 = \underbrace{\left(\sqrt{1 - \alpha y^2}\right)^2}_{R^2}$$

puis en utilisant les coordonnées cylindriques :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \alpha y^2}\cos\varphi \\ y \\ \sqrt{1 - \alpha y^2}\sin\varphi \end{pmatrix} ,y \in \mathbb{R},\ \varphi \in [0;2\pi] .$$

(2) $-2x^2 + y^2 + z^2 = \alpha$.

• Si $\alpha > 0$, on réécrit l'équation $-\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{\alpha}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{\alpha}}\right)^2 = 1$. C'est un hyperboloïde à une nappe de révolution autour de l'axe (Ox). En écrivant $y^2 + z^2 = \left(\sqrt{\alpha + 2x^2}\right)^2$, une paramétrisation possible est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{\alpha + 2x^2}\cos\varphi \\ \sqrt{\alpha + 2x^2}\sin\varphi \end{pmatrix} ,x \in \mathbb{R},\ \varphi \in [0;2\pi] .$$

• si $\alpha = 0$, on réécrit l'équation $x^2 = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2$.C'est un cône de révolution autour de l'axe (Ox).
En écrivant $y^2 + z^2 = (\sqrt{2}|x|)^2$, une paramétrisation est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{2}|x|\cos\varphi \\ \sqrt{2}|x|\sin\varphi \end{pmatrix} ,x \in \mathbb{R}\ ,\ \varphi \in [0;2\pi] .$$

• Si $\alpha < 0$, on réécrit l'équation $\left(\frac{x}{\sqrt{-\frac{\alpha}{2}}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{-\alpha}}\right)^2 - \left(\frac{z}{\sqrt{-\alpha}}\right)^2 = 1$. C'est un hyperboloïde à deux nappes de révolution autour de l'axe (Ox). Une paramétrisation possible est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{\alpha + 2x^2}\cos\varphi \\ \sqrt{\alpha + 2x^2}\sin\varphi \end{pmatrix} \ , \ x \in \left] -\infty; -\sqrt{-\frac{\alpha}{2}} \right] \cup \left[\sqrt{-\frac{\alpha}{2}}; +\infty \right[\ , \ \varphi \in [0; 2\pi] \ .$$

Chapitre 3. Exercice A.2.8 Courbes et intersection de surfaces de $\mathbb{R}^3$

On considère deux surfaces de $\mathbb{R}^3$ définies par les paramétrisations suivantes :

$$\mathcal{S}_1 := \left\{ M\begin{pmatrix} u+v+\frac{1}{3} \\ u-2v+\frac{1}{3} \\ -2u+v+\frac{1}{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; u,v\in\mathbb{R} \right\} ,$$

$$\mathcal{S}_2 := \left\{ M\begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2+v^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; u,v\in\mathbb{R} \right\} .$$

1. • La surface $\mathcal{S}_1$ est un plan d'équation $x+y+z=1$.

• La surface $\mathcal{S}_2$ est un paraboloïde de révolution autour de l'axe (Oz) d'équation $z=x^2+y^2$.

2. (a) • En utilisant la paramétrisation, on applique la formule du théorème III.5.1 page 25 pour trouver un vecteur normal $\overrightarrow{N}_2$ à la surface $\mathcal{S}_2$ au point $M_2(x_0=u_0\,,\,y_0=v_0\,,\,z_0=u_0^2+v_0^2)$. On doit commencer par calculer les vecteurs tangents à la surface.

$$\overrightarrow{T}_1 = \frac{\partial\overrightarrow{OM_2}}{\partial u}(u_0,v_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u_0 \end{pmatrix} \text{ and } \overrightarrow{T}_2 = \frac{\partial\overrightarrow{OM_2}}{\partial v}(u_0,v_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v_0 \end{pmatrix}$$

Ces deux vecteurs ne s'annulent jamais et ne sont pas colinéaires. On a

$$\overrightarrow{N}_2 = \overrightarrow{T}_1 \wedge \overrightarrow{T}_2 = \begin{pmatrix} -2u_0 \\ -2v_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_0 \\ -2y_0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

On remarque que l'on retrouve le résultat précédent en repassant en coordonnées cartésiennes. Ce n'est pas toujours le cas, souvent on trouve un vecteur normal différent mais colinéaire au précédent.

• Une équation du plan tangent Π_2 à $\mathcal{S}_2$ au point $M_2(x_0,y_0,z_0)$ est donnée par la formule

$$M(x,y,z)\in\Pi_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{N}_2\cdot\overrightarrow{M_2M}=0 \Leftrightarrow (z-z_0)=2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0) .$$

(b) On suppose $M_2\in(\mathcal{C}=\mathcal{S}_1\cap\mathcal{S}_2)$. Soit Π_1 le plan tangent à la surface $\mathcal{S}_1$ au point M_2.

Un vecteur tangent $\overrightarrow{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point M_2 appartient à l'intersection des deux plans tangents Π_1 et Π_2 (déterminé précédemment). Autrement dit, ce vecteur tangent est orthogonal aux deux vecteurs normaux aux plans tangents Π_1 et Π_2. Inversement, soient $\overrightarrow{N}_1$ un vecteur normal à Π_1 et $\overrightarrow{N}_2$ un vecteur normal à Π_2, alors $\overrightarrow{T}=\overrightarrow{N}_1\wedge\overrightarrow{N}_2$ est tangent à la courbe $\mathcal{C}$ au point M_2.

• On a déjà déterminé $\overrightarrow{N}_2$.

• Étant donné un plan $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation $ax+by+cz=d$ où a,b,c,d sont connus, le plan tangent en tout point $M_0(x_0,y_0,z_0)$ du plan $\mathcal{P}$ est défini par l'équation $a(x-x_0)+b(x-x_0)+c(x-x_0)=0$ et un vecteur normal à ce plan tangent est $\overrightarrow{N}_0=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

On en déduit que $\overrightarrow{N}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal à Π_1.

• On applique la formule pour trouver $\overrightarrow{T}$:

$$\overrightarrow{T}=\overrightarrow{N}_1\wedge\overrightarrow{N}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} -2x_0 \\ -2y_0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+2y_0 \\ -2x_0-1 \\ 2x_0-2y_0 \end{pmatrix} .$$

• L'équation de la droite $\mathcal{T}$ tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $M_2(x_0, y_0, z_0)$ est caractérisée par

$$M(x,y,z) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \exists\, t \in \mathbb{R},\ M = M_2 + t\overrightarrow{T} \Leftrightarrow \exists\, t \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{l} x = x_0 + t(1+2y_0)\,, \\ y = y_0 - t(1+2x_0)\,, \\ z = z_0 + 2t(x_0 - y_0)\,. \end{array}\right.$$

3. On reprend les equations implicites des surfaces $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$. On a

$$M(x,y,z) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ z = x^2+y^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 1-x-y = x^2+y^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \rightarrow \text{ plan} \\ (x+\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{2} \rightarrow \text{ cylindre} \end{array}\right.$$

La première équation définit un plan qui est la surface $\mathcal{S}_1$. La seconde équation définit un cylindre de révolution autour de l'axe parrallèle à (Oz) passant par le point de coordonnées $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$ et de rayon $\sqrt{\frac{3}{2}}$.
• On peut alors paramétrer la courbe $\mathcal{C}$ en s'inspirant de la paramétrisation d'un cylindre :

$$M(x,y,z) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \exists \theta \in [0, 2\pi[\,,\ \left\{\begin{array}{l} x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}}\cos\theta\,, \\ y = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta\,, \\ z = 1 - x - y = 2 - \sqrt{\frac{3}{2}}(\cos\theta + \sin\theta)\,. \end{array}\right.$$

> Dans le cas particulier d'un cylindre elliptique $C_{(0,0)}$ d'axe (Oz), centré à l'origine et de demi-axes de longueurs a et b, l'équation implicite est $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ et une paramétrisation est $(a\cos\theta, b\sin\theta, z)$ avec $\theta \in [0; 2\pi[$ et $z \in \mathbb{R}$.
> Dans le cas plus général du cylindre elliptique $C_{(\alpha,\beta)}$ centré au point de coordonnées $(\alpha\,, \beta\,, 0)$, on doit effectuer un changement de variable $x' = x - \alpha$, $y' = y - \beta$, $z' = z$. On a donc
>
> $$M(x,y,z) \in C_{(\alpha,\beta)} \Leftrightarrow M'(x', y', z') \in C_{(0,0)}\,.$$
>
> L'équation implicite de $C_{(\alpha,\beta)}$ est $\left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x-\alpha}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-\beta}{b}\right)^2 = 1$.
> Si $a = b = R$, on réécrit cette équation $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$ et on dit que $C_{(\alpha,\beta)}$ est un cylindre de révolution autour de l'axe parrallèle à (Oz) passant par le point de coordonnées $(\alpha, \beta, 0)$.
> Pour obtenir une paramétrisation de $C_{(\alpha,\beta)}$ on cherche une paramétrisation de $C_{(0,0)}$ pour les points $M'(x', y', z')$ et on fait le changement de variable inverse $x = x' + \alpha$, $y = y' + \beta$, $z = z'$.
> On obtient $(a\cos\theta + \alpha, b\sin\theta + \beta, z)$ avec $\theta \in [0; 2\pi[$ et $z \in \mathbb{R}$.

Un vecteur tangent $\overrightarrow{T'}$ à la courbe $\mathcal{C}$ en $M_2(x_0, y_0, z_0)$ est obtenu en dérivant chaque coordonnée par rapport à θ. On obtient

$$\overrightarrow{T'} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta_0 \\ \sqrt{\frac{3}{2}}\cos\theta_0 \\ \sqrt{\frac{3}{2}}(\sin\theta_0 - \cos\theta_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_0 - \frac{1}{2} \\ x_0 + \frac{1}{2} \\ y_0 - x_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{T}\,.$$