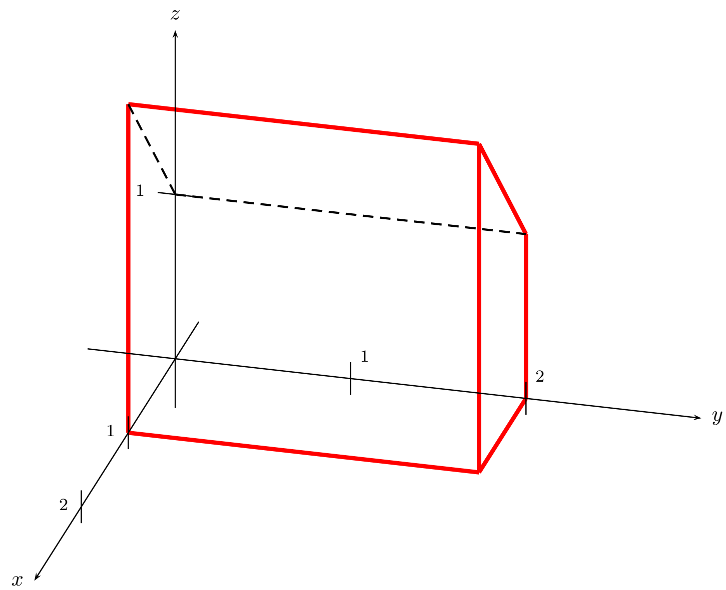
Chapitre 4. Exercice A.2.2 Interprétation d'une intégrale double

1.



$$I_1 = \iint_{\mathscr{D}} (1+x)\, dxdy = \left(\int_0^1 (1+x)\, dx\right)\left(\int_0^2 1\, dy\right) = 2\Big[\frac{(1+x)^2}{2}\Big]_0^1 = 3.$$

Il s'agit d'un solide de base $\mathscr{D} = [0,1]\times[0,2] \subset (xOy)$ et de face supérieur d'équation $z = 1+x$. Son volume peut être calculé par la formule

$$\frac{Aire(\mathscr{D}) \times (h_{min} + h_{max})}{2} = \frac{2\times(2+1)}{2}$$

2. Il s'agit d'un solide de base $\mathscr{D} = [0,2]\times[0,1] \subset (xOy)$ et de face supérieur d'équation $z = 1+\sqrt{2y-y^2}$. Une figure permet de voir que le solide obtenu est la réunion d'un parallélépipède $[0,2]\times[0,1]\times[0,1]$ et d'un quart de cylindre d'axe $//(Ox)$, de longueur 2 et dont la base est un quart de disque $((y-1)^2+z^2 \leq 1)$ inclu dans le plan $x=0$. Le volume du parallélépipède est $2\times1\times1 = 2$ et le volume du cylindre est $Aire(base)\times longueur = \frac{\pi}{4}\times 2 = \frac{\pi}{2}$.

Le volume se calcul aussi de la façon suivante :

$$\iint_{\mathscr{D}} (1+\sqrt{2y-y^2}) dxdy = \iint_{\mathscr{D}} 1\, dxdy + \iint_{\mathscr{D}} \sqrt{2y-y^2}\, dxdy = \underbrace{Aire(\mathscr{D})}_{=2} + \underbrace{\left(\int_0^2 1\, dx\right)}_{=2} \times \left(\int_0^1 \sqrt{2y-y^2} dy\right).$$

Il reste à calculer :

$$\int_0^1 \sqrt{2y-y^2} dy = \int_0^1 \sqrt{1-(y-1)^2} dy$$

en utilisant le changement de variable $\boxed{y-1 = \sin\theta}$.

• On change les bornes :

$$y = 1 \Leftrightarrow \sin\theta = y-1 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

$$y = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = y-1 = -1 \Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{2} \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

• On exprime dy en fonction de dt :

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{d[1+\sin\theta]}{d\theta} = \cos\theta \quad \Leftrightarrow dy = \cos\theta\, d\theta$$

• On transforme l'intégrand :

$$\sqrt{1-(y-1)^2} = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{\cos^2\theta} = \cos t$$

Finalement,

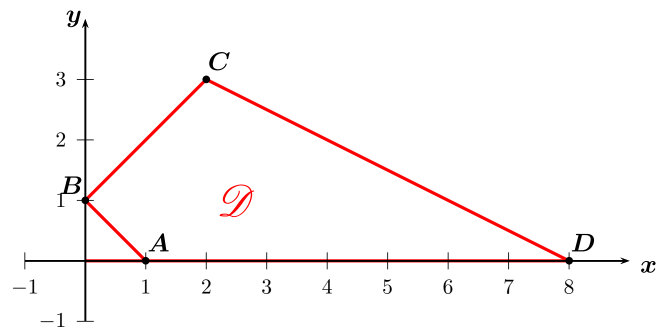
$$\int_0^1 \sqrt{2y-y^2}dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos\theta \times \cos\theta\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2\theta\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\, d\theta = \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{\pi}{4}$$

On en déduit

$$\iint_{\mathscr{D}} (1+\sqrt{2y-y^2})dxdy = 2 + 2\times\frac{\pi}{4} = 2 + \frac{\pi}{2}.$$

Chapitre 4. Exercice A.2.3 Théorème de Fubini

1.a)



Il s'agit de découper le polygone pour pouvoir appliquer la formule de Fubini sur chaque sous-domaine. Les équations des segments du polygone sont utiles pour définir les bornes des variables x ou y

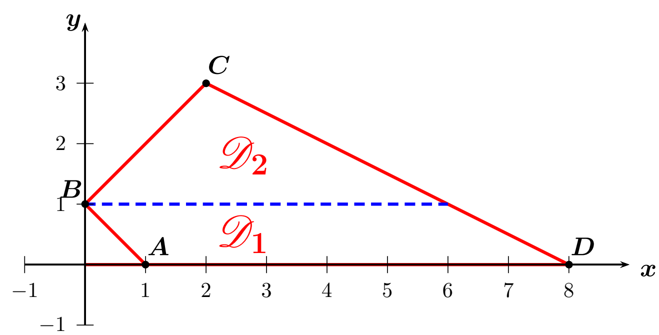
$$M(x,y) \in (AB) \Leftrightarrow y = 1 - x \Leftrightarrow x = 1 - y$$

$$M(x,y) \in (BC) \Leftrightarrow y = 1 + x \Leftrightarrow x = y - 1$$

$$M(x,y) \in (CD) \Leftrightarrow y = 4 - \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 8 - 2y$$

$$M(x,y) \in (AD) \Leftrightarrow y = 0$$

Méthode 1 : découpage horizontal



On a

$$\mathscr{D}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \le y \le 1 \text{ et } 1 - y \le x \le 8 - 2y\}$$

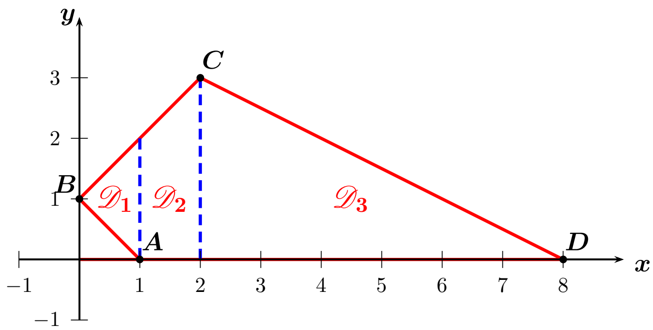
et

$$\mathscr{D}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1 \le y \le 3 \text{ et } y - 1 \le x \le 8 - 2y\}.$$

On en déduit que pour toute fonction continue et bornée sur $\mathscr{D}$ on a

$$\iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{1-y}^{8-2y} f(x,y)\,dx \right) dy + \int_1^3 \left(\int_{y-1}^{8-2y} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Méthode 2 : découpage vertical



On a

$$\mathscr{D}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 1-x \leq y \leq 1+x\} ,$$

$$\mathscr{D}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; 1 \leq x \leq 2 \text{ et } 0 \leq y \leq 1+x\}$$

et

$$\mathscr{D}_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; 2 \leq x \leq 8 \text{ et } 0 \leq y \leq 4 - \tfrac{x}{2}\}$$

On en déduit que pour tout fonction continue et bornée sur $\mathscr{D}$ on a

$$\iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\, dxdy = \int_0^1 \left(\int_{1-x}^{1+x} f(x,y)\, dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_0^{1+x} f(x,y)\, dx \right) dy + \int_2^8 \left(\int_0^{4-\frac{x}{2}} f(x,y)\, dx \right) dy.$$

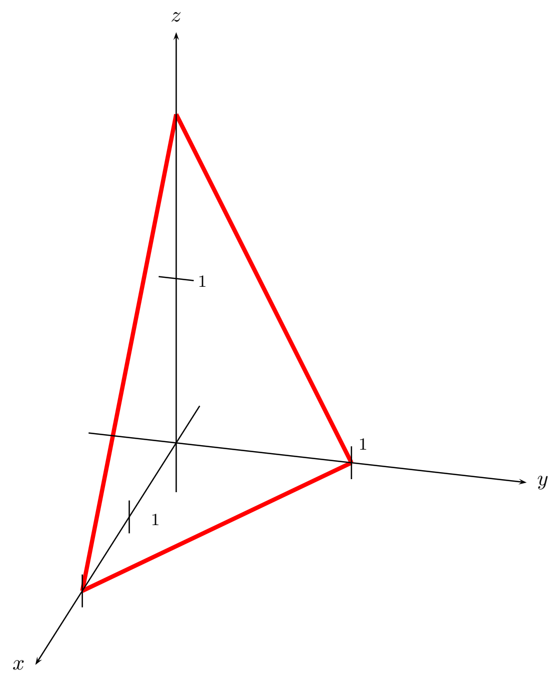
b) La distance d'un point $M(x,y)$ à l'axe des abscisses Δ est $d(M,\Delta) = |y|$. Il s'agit alors de calculer l'intégrale $\displaystyle\iint_{\mathscr{D}} y^2\, dxdy$ avec l'une ou l'autre des méthodes ci-dessus.

Privilégier la méthode 1. l'intégrand étant une fonction de y ...

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathscr{D}} y^2\, dxdy &= \int_0^1 \left(\int_{1-y}^{8-2y} y^2\, dx \right) dy + \int_1^3 \left(\int_{y-1}^{8-2y} y^2\, dx \right) dy \\
&= \int_0^1 y^2(7-y)dy + \int_1^3 y^2(9-3y)dy \\
&= \left[\frac{7y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1 + \left[3y^3 - \frac{3y^4}{4} \right]_1^3 = \tfrac{7}{3} - \tfrac{1}{4} + \underbrace{81 - \tfrac{3}{4} \times 81}_{=\frac{81}{4}} - 3 + \tfrac{3}{4} = \tfrac{241}{12}.
\end{aligned}$$

Chapitre 4. Exercice A.2.4 Calcul de volume

Il s'agit d'un solide délimité par les plans $z = 0$ et $z = 2 - x - 2y$ en hauteur.



Pour calculer son volume, il reste à déterminer la base de ce solide, c'est à dire la projection du solide dans le plan $z = 0$.

Mathématiquement parlant, il s'agit du domaine de définition des coordonnées (x, y) des points du solide : On a

$$x \geq 0, \quad y \geq 0,$$

et

$$z \geq 0 \text{ et } z \leq 2 - x - 2y \Rightarrow 0 \leq 2 - x - 2y$$

Une figure dans le plan (xOy) permet de voir que la base $\mathscr{D}$ peut être définie par

$$\mathscr{D}\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq y \leq 1 \text{ et } 0 \leq x \leq 2 - 2y\}.$$

Le volume du solide est donc

$$\begin{aligned}\iint_{\mathscr{D}} (2 - x - 2y) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{2-2y} (2 - x - 2y) dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left[(2 - 2y)x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{2-2y} dx \\ &= \int_0^1 \frac{(2 - 2y)^2}{2} dy \\ &= \left[-\frac{(2 - 2y)^3}{12} \right]_0^1 \\ &= \frac{8}{12} = \frac{2}{3}\,.\end{aligned}$$

Il s'agit d'une pyramide à base triangulaire dont le volume est

$$\frac{Aire(\mathscr{D}) \times h_{max}}{3} = \frac{(\frac{2\times1}{2}) \times 2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Chapitre 4. Exercice A.2.6 Fubini, changement de variables

À faire !