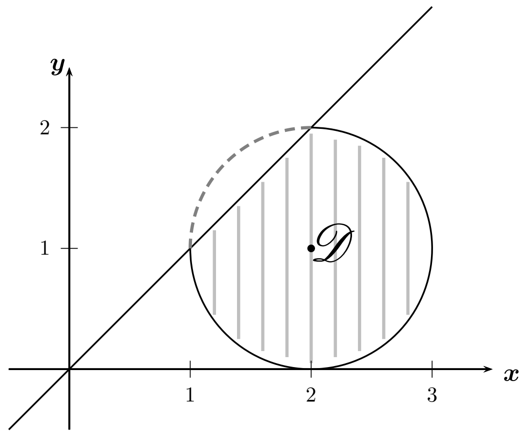
**Chapitre 4. Exercice A.2.6 Fubini, changement de variables**

**1.** Le domaine $\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 1 \ , \ x \geq 0 \ , \ y \leq x\}$ est un disque de centre $(2\,;1)$ et de rayon 1, tronqué par le demi-plan inférieur de frontière la droite d'équation $y = x$.




Nous avons besoin de découper le domaine en 2 sous-domaine pour appliquer le théorème de Fubini. On a

$$\begin{aligned}\mathscr{D} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2 \ , \ 1 - \sqrt{1-(x-2)^2} \leq y \leq x\} \\ &\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq x \leq 3 \ , \ 1 - \sqrt{1-(x-2)^2} \leq y \leq 1 + \sqrt{1-(x-2)^2}\}\,.\end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^2 \left( \int_{1-\sqrt{1-(x-2)^2}}^{x} f(x,y)\,dy \right) dx + \int_2^3 \left( \int_{1-\sqrt{1-(x-2)^2}}^{1+\sqrt{1-(x-2)^2}} f(x,y)\,dy \right) dx \ .$$

Avec un autre découpage, on a

$$\begin{aligned}\mathscr{D} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1 \ , \ 2 - \sqrt{1-(y-1)^2} \leq x \leq 2 + \sqrt{1-(y-1)^2}\} \\ &\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y \leq 2 \ , \ y \leq x \leq 2 + \sqrt{1-(y-1)^2}\}\,.\end{aligned}$$

On obtient alors

$$\iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left( \int_{2-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{2+\sqrt{1-(y-1)^2}} f(x,y)\,dx \right) dy + \int_1^2 \left( \int_{y}^{2+\sqrt{1-(y-1)^2}} f(x,y)\,dx \right) dy \ .$$

**2.** On pose $\mathcal{V} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 1 \ , \ z \leq x \ , \ z \geq 0 \ , \ y \leq x\}$ (voir figure page suivante).

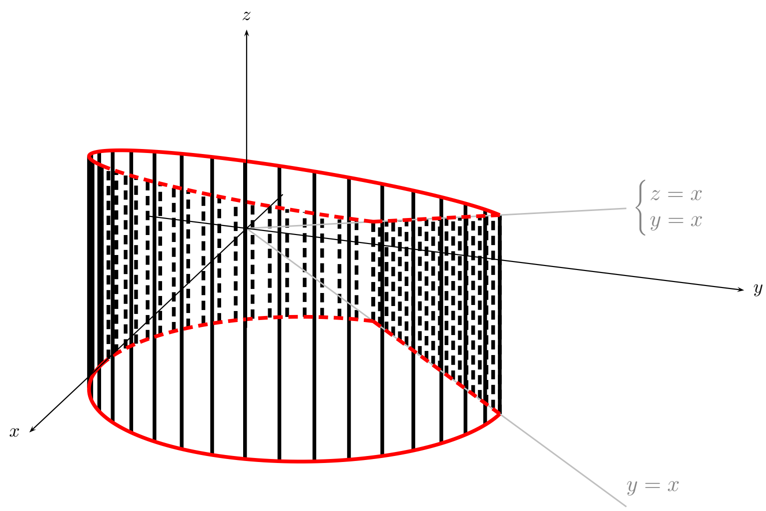
(a) La projection du volume $\mathcal{V}$ dans le plan $z = 0$ est le domaine de définition des variables $(x,y)$. De la définition de $\mathcal{V}$, il en ressort que $(x,y)$ satisfont les conditions suivantes

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 1 \text{ et } y \leq x \tag{1}$$

et

$$0 \leq z \text{ et } z \leq x \qquad \Rightarrow \qquad 0 \leq x. \tag{2}$$

Or, la condition "$0 \leq x$" est automatiquement vérifiée par les points du disque $(x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 1$ donc on peut supprimer la condition (2). La projection de $\mathcal{V}$ dans le plan $z = 0$ est le domaine $\mathscr{D}$.




(b) À faire !

$$\iint_{\mathscr{D}} x\,dx\,dy = \int_0^1 \left( \int_{2-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{2+\sqrt{1-(y-1)^2}} x\,dx \right) dy + \int_1^2 \left( \int_{y}^{2+\sqrt{1-(y-1)^2}} x\,dx \right) dy$$

On effectue le changement de variable $\sin\theta = y-1$ dans la première et la troisième intégrale :

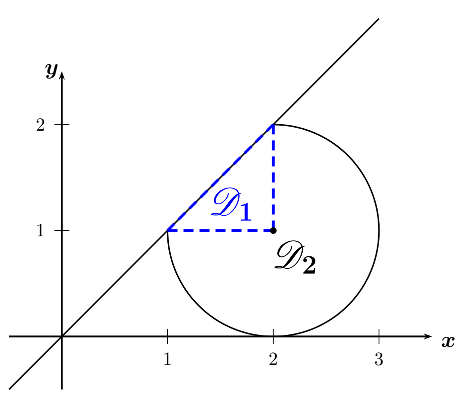
$$dy = \cos\theta\,d\theta \quad , \quad y=0 \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{2} \quad , \quad y=1 \Leftrightarrow \theta = 0 \quad , \quad y=2 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}\ .$$

$$\iint_{\mathscr{D}} x\,dx\,dy = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2\theta\,d\theta + \left[ 2y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} \right]_1^2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta$$

Sachant que $2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$ on obtient

$$\begin{aligned} \iint_{\mathscr{D}} x\,dx\,dy &= 2\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + 4 - \frac{8}{3} + 2 - 2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \pi + \frac{7}{6} + \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{7}{6} + \frac{3\pi}{2}}\ . \end{aligned}$$

**3.** On définit $\mathscr{D}_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ y \geq 1,\ x \leq 2,\ y \leq x\}$ et $\mathscr{D}_2 = \mathscr{D}\backslash\mathscr{D}_1$.



(a) D'après le schéma $\mathscr{D}_2$ est le trois-quart de disque de centre $(2,1)$ de rayon 1 paramétrable en coordonées polaires de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2 + r\cos\theta \\ y = 1 + r\sin\theta \end{array}\right. \qquad \text{avec } \theta \in [-\pi, \frac{\pi}{2}] \text{ et } r \in [0,1]$$

Le jacobien associé à ce changement de variable est $J = r$. En notant $\Delta = [0,1] \times [-\pi, \frac{\pi}{2}]$, on obtient

$$\iint_{\mathscr{D}_2} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Delta} f(2 + r\cos\theta, 1 + r\sin\theta) r\,dr\,d\theta$$

Pour $f(x,y) = x$ on a

$$\iint_{\mathscr{D}_2} x\,dx\,dy = \iint_{\Delta} (2 + r\cos\theta) r\,dr\,d\theta = \int_0^1 \left( \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} r(2 + r\cos\theta)\,d\theta \right) dr = \int_0^1 [r(2\theta + r\sin\theta)]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\,dr$$

$$= \int_0^1 r(3\pi + r)dr = \boxed{\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{3}}.$$

(b) Pour retrouver le volume de $\mathcal{V}$ on doit effectuer le calcul suivant

$$\iint_{\mathscr{D}} x\,dx\,dy = \iint_{\mathscr{D}_1} x\,dx\,dy + \iint_{\mathscr{D}_2} x\,dx\,dy\ .$$

Il reste à calculer l'intérgrale sur la partie $\mathscr{D}_1$ qui est un triangle rectangle

$$\mathscr{D}_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 1 \leq y \leq x \leq 2,\ y \leq x\}$$

On peut calculer l'intégrale sur $\mathscr{D}_1$ de deux façons différentes :

$$\iint_{\mathscr{D}_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^2 \left( \int_y^2 f(x,y)\,dx \right) dy = \int_1^2 \left( \int_1^x f(x,y)\,dy \right) dx\ .$$

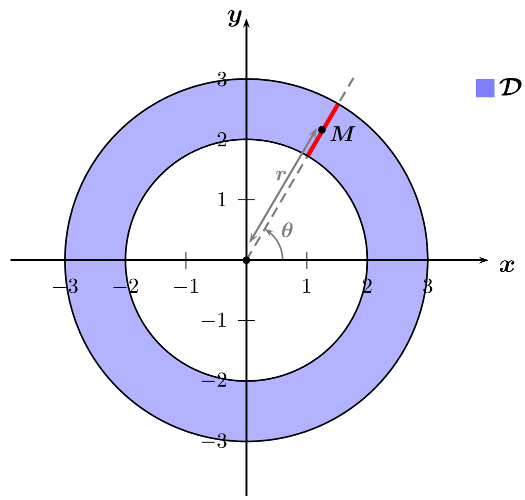
Pour $f(x,y) = x$, on obtient

$$\iint_{\mathscr{D}_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^2 \left( \int_1^x x\,dy \right) dx = \int_1^2 [xy]_1^x\,dx = \int_1^2 x(x-1)dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2$$

$$= \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{5}{6}}.$$

<u>Conclusion :</u> Le volume de $V$ est $\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{3} + \frac{5}{6} = \frac{3\pi}{2} + \frac{7}{6}$.

**Chapitre 4. Exercice A.2.5 Changement de variables**




On utilisant le système de coordonnées polaires, on a

$$(x, y) \in \mathscr{D} \Leftrightarrow \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad r \in [2,3] \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[$$

Le jacobien associé à ce changement de variable est

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta - (-r\sin^2\theta) = r.$$

On obtient

$$\boxed{\iint_{\mathscr{D}} = \iint_{[2,3]\times[0,2\pi]} r \times r\, dr d\theta = \left(\int_2^3 r^2\, dr\right) \times 2\pi = \left[\frac{r^3}{3}\right]_2^3 \times 2\pi = \frac{38}{3}\pi}.$$