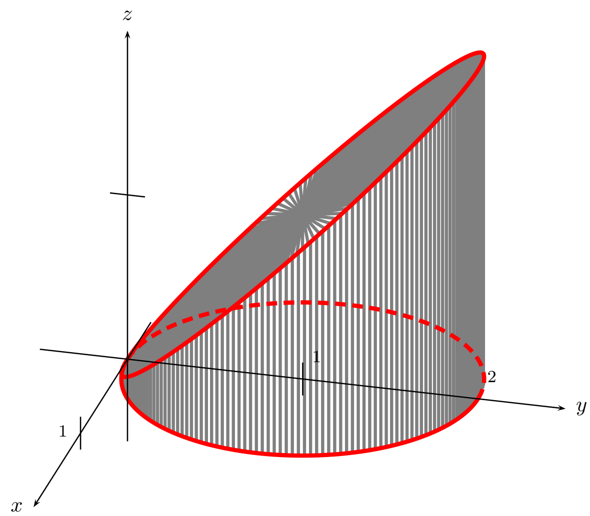
Chapitre 4. Exercice A.2.2 Interprétation d'une intégrale double
3.



Le domaine $\mathscr{D}$ est un disque. En effet,

$$x^2 + y^2 - 2y \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 \leq 1.$$

Une méthode astucieuse pour calculer I_3 est d'écrire

$$\begin{aligned} I_3 = \iint_{\mathscr{D}} y\,dxdy &= \iint_{\mathscr{D}} (y-1)dxdy + \iint_{\mathscr{D}} 1\,dxdy \\ &= 0 \quad + \quad Aire(\mathscr{D}) = \pi. \end{aligned}$$

La première intégrale double est nulle car le volume signé est nul pour des raisons de symétries.

La formule précédente marche encore

$$\frac{Aire(\mathscr{D}) \times (h_{min} + h_{max})}{2} = \frac{\pi \times (0+2)}{2} = \pi.$$

ou bien on applique la 2ème formule de Fubini au domaine D :

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq y \leq 2 \text{ et } -\sqrt{1-(y-1)^2} \leq x \leq \sqrt{1-(y-1)^2}\}.$$

$$\iint_{\mathscr{D}} y\,dxdy = \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} y\,dx \right) dy = \int_0^2 \Big[yx \Big]_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} dy = \int_0^2 2y\sqrt{1-(y-1)^2}.$$

Il faut alors effectuer un changement de variable avec sin : on pose $\boxed{y - 1 = \sin t}$
• On change les bornes :

$$y = 2 \Leftrightarrow \sin t = y - 1 = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

$$y = 0 \Leftrightarrow \sin t = y - 1 = -1 \Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

• On exprime dy en fonction de dt :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d[1+\sin t]}{dt} = \cos t \quad \Leftrightarrow dy = \cos t\, dt$$

• On transforme l'intégrand :

$$2y\sqrt{1-(y-1)^2} = 2(1+\sin t)\sqrt{1-\sin^2 t} = 2(1+\sin t)\sqrt{\cos^2 t} = 2(1+\sin t)\cos t$$

Finalement,

$$\iint_{\mathscr{D}} y\, dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2(1+\sin t)\cos t \times \cos t\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[2\cos^2 t + 2\sin t\cos^2 t\right] dt$$

On a besoin de la linéarisation de $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$ et de la formule

$$\int u' \times u^2 \;=\; \frac{u^3}{3}$$

On conclut que

$$\iint_{\mathscr{D}} y\, dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[1+\cos 2t - 2(-\sin t)\cos^2 t\right] dt = \left[t + \frac{\sin 2t}{2} - 2\frac{\cos^3 t}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \boxed{\pi}$$

Chapitre 4. Exercice A.2.3 Théorème de Fubini

2. Soit $h > 0$. On pose $\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y^2 \leq 4x,\ y \geq 0 \text{ et } x \leq h\}$.

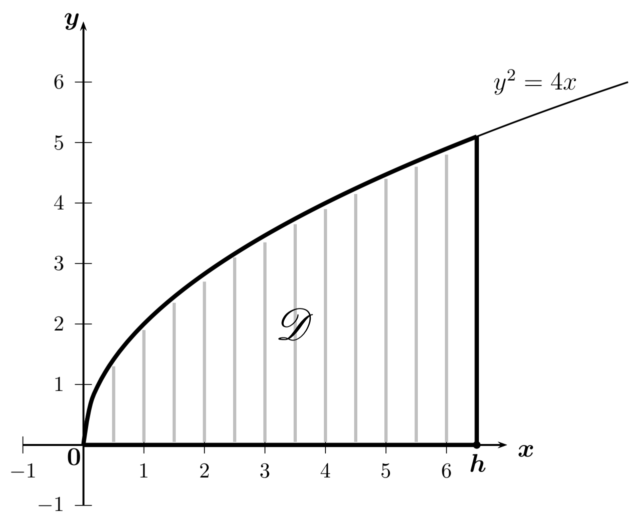
Ce domaine a déjà étédudié au chapitre 3, exercice A.2.1.

(a) méthode 1 : On peut appliquer la première formule de Fubini en redéfinissant de $\mathscr{D}$ de la façon suivante

$$\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq h \text{ et } 0 \leq y \leq 2\sqrt{x}\}.$$

Ainsi, pour tout fonction intégrable f sur $\mathscr{D}$ on a

$$\iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dxdy = \int_0^h \left(\int_0^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy \right) dx.$$



méthode 2 : On peut appliquer la deuxième formule de Fubini en redéfinissant de $\mathscr{D}$ de la façon suivante

$$\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq y \leq 2\sqrt{h} \text{ et } \frac{y^2}{4} \leq x \leq h\}.$$

Ainsi, pour tout fonction intégrable f sur $\mathscr{D}$ on a

$$\iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dxdy = \int_0^{2\sqrt{h}} \left(\int_{\frac{y^2}{4}}^{h} f(x,y)dx \right) dy.$$

(b) Il faut calculer avec l'une ou l'autre des formules les trois quantités suivantes

$$\boxed{m = \iint_{\mathscr{D}} 1\,dxdy = Aire(D)} \qquad \boxed{x_G = \frac{1}{m}\iint_{\mathscr{D}} x\,dxdy} \qquad \boxed{y_G = \frac{1}{m}\iint_{\mathscr{D}} y\,dxdy}$$

$$m = \int_0^h \left(\int_0^{2\sqrt{x}} 1\,dy \right) dx = \int_0^h 2\sqrt{x}\,dx = 2 \times \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^h = \frac{4}{3}h^{\frac{3}{2}}.$$

$$x_G = \frac{1}{\frac{4}{3}h^{\frac{3}{2}}} \int_0^h \left(\int_0^{2\sqrt{x}} x\,dy \right) dx = \frac{3}{4h^{\frac{3}{2}}} \int_0^h 2x\sqrt{x}\,dx = \frac{3}{2h^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_0^h = \frac{3}{2h^{\frac{3}{2}}} \times \frac{h^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{3}{5}h$$

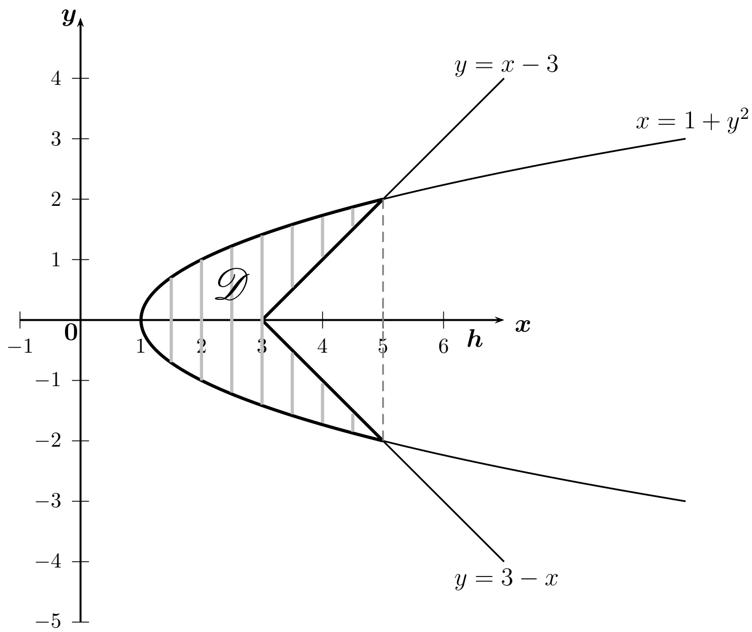
$$y_G = \frac{1}{\frac{4}{3}h^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\sqrt{h}} \left(\int_{\frac{y^2}{4}}^{h} y\,dx \right) dy = \frac{3}{4h^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\sqrt{h}} y(h - \tfrac{y^2}{4})\,dy = \frac{3}{4h^{\frac{3}{2}}} \left[h\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{16} \right]_0^{2\sqrt{h}} = \frac{3}{4h^{\frac{3}{2}}} \times (2h^2 - h^2) = \frac{3}{4}\sqrt{h}$$

3. On redéfinir $\mathscr{D}$ de la façon suivante :

$$\mathscr{D} = \mathscr{D}_4 \backslash \mathscr{D}_5$$

où

$$\mathscr{D}_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 + y^2 \leq x \leq 5\},$$
$$\mathscr{D}_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 3 \leq x \leq 5 \text{ et } 3 - x \leq y \leq x - 3\}.$$



Pour toute fonction intégrable f sur $\mathscr{D}$, on obtient

$$\begin{aligned}\iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dxdy &= \iint_{\mathscr{D}_4} f(x,y)\,dxdy - \iint_{\mathscr{D}_5} f(x,y)\,dxdy \\ &= \int_{-2}^{2} \left(\int_{1+y^2}^{5} f(x,y)\,dx \right) dy - \int_3^5 \left(\int_{3-x}^{x-3} f(x,y) dy \right) dx.\end{aligned}$$

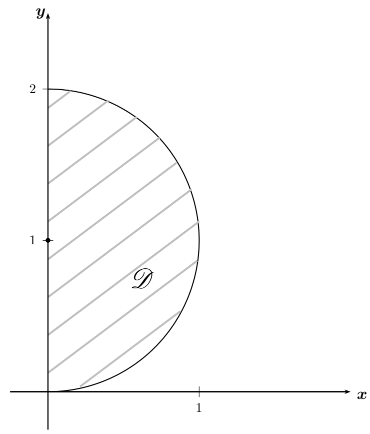
Comme le domaine $\mathscr{D}$ est symétrique par rapport à l'axe d'équation $y = 0$, on a $\boxed{y_G = 0}$.

$$\begin{aligned}m &= \iint_{\mathscr{D}} 1\,dxdy \\ &= \int_{-2}^{2} \left(\int_{1+y^2}^{5} 1\,dx \right) dy - \int_3^5 \left(\int_{3-x}^{x-3} 1 dy \right) dx \\ &= \int_{-2}^{2} (4 - y^2) dy - \int_3^5 (2x - 6)\,dx \\ &= \left[4y - \frac{y^3}{3} \right]_{-2}^{2} - \left[x^2 - 6x \right]_3^5 = \underbrace{(8 - \tfrac{8}{3}) - (-8 + \tfrac{8}{3})}_{= \frac{32}{3}} - \underbrace{(25 - 30 - 9 + 18)}_{=4} = \frac{20}{3}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_G = \frac{1}{m}\iint_{\mathscr{D}} x\,dxdy = {} & \frac{3}{20}\left[\int_{-2}^{2}\left(\int_{1+y^2}^{5} x\,dx\right)dy - \int_{3}^{5}\left(\int_{3-x}^{x-3} xdy\right)dx\right] \\
&= \frac{3}{20}\left[\int_{-2}^{2}(12-\tfrac{y^4}{2}-y^2)dy - \int_{3}^{5} x(2x-6)\,dx\right] \\
&= \frac{3}{20}\times\left(\left[12y-\frac{y^5}{10}-\frac{y^3}{3}\right]_{-2}^{2} - \left[\frac{2x^3}{3}-3x^2\right]_{3}^{5}\right) \\
&= \frac{3}{20}\times\left(\underbrace{(24-\tfrac{32}{10}-\frac{8}{3})-(-24+\tfrac{32}{10}+\frac{8}{3})}_{=48-\frac{32}{5}-\frac{16}{3}} - \underbrace{(2\frac{5^3}{3}-9\frac{5^2}{3}-18+27)}_{=\frac{25}{3}+9}\right) = \frac{284}{100}
\end{aligned}
$$

Chapitre 4. Exercice A.2.7 Fubini, changement de variables

1. Le domaine $\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \ , \ x \geq 0\}$ est un demi-disque de centre $(0\,;1)$ et de rayon 1.



Nous n'avons pas besoin de découper le domaine pour appliquer le théorème de Fubini. On a

$$\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \ , \ 1 - \sqrt{1-x^2} \leq y \leq 1 + \sqrt{1-x^2}\}\,.$$

On obtient ainsi

$$\iint\limits_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy \right) dx\ .$$

On a également

$$\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 2 \ , \ 0 \leq x \leq \sqrt{1-(y-1)^2}\}\,.$$

On obtient alors

$$\iint\limits_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{1-(y-1)^2}} f(x,y)\,dx \right) dy\ .$$

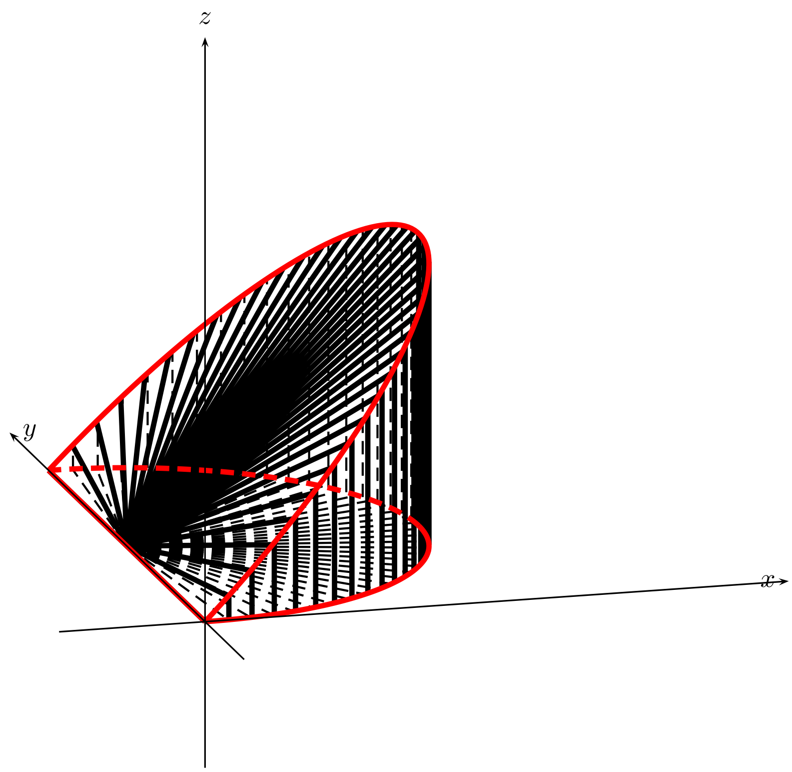
2. On pose $\mathcal{V} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \ , \ x \geq 0 \ , \ z \geq 0 \ , \ z \leq x\}$ (voir figure page suivante). Le domaine $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^3$ représente l'intérieur d'un cylindre limité par les surfaces d'équations $z = 0$ et $z = f(x,y) = x$. Dans ce cas le volume de $\mathcal{V}$ est donné par l'integrale double

$$\iint\limits_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\mathscr{D}} x\,dx\,dy.$$

D'après **1.** on trouve

$$\iint\limits_{\mathscr{D}} x\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} x\,dy \right) dx = \int_0^1 \Big[xy\Big]_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\,dx = \Big[-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{1-(y-1)^2}} x\,dx \right) dy = \int_0^2 \Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^{\sqrt{1-(y-1)^2}} dy = \frac{1}{2}\int_0^2 \big(1-(y-1)^2\big)dy = \frac{1}{2}\Big[y - \frac{(y-1)^3}{3}\Big]_0^2 = \frac{2}{3}$$



3. a. On pose $\begin{cases} x(r,\theta) = r\cos\theta \\ y(r,\theta) = 1 + r\sin\theta \end{cases}$

On remplace x et y par leurs expressions respectives en fonction de r et θ dans les deux inéquations caractérisants le domaine $\mathscr{D}$ pour obtenir des informations sur r et θ. On a :

• $x = r\cos\theta \geq 0 \underset{\text{car } r\geq 0}{\Leftrightarrow} \cos\theta \geq 0 \Leftrightarrow \theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right]$;

• $x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 \leq 1 \Leftrightarrow r^2 \leq 1 \underset{\text{car } r\geq 0}{\Leftrightarrow} 0 \leq r \leq 1$.

Conclusion : $(x,y) \in \mathscr{D} \Leftrightarrow (r,\theta) \in \Delta = [0\,;1] \times \left[-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Ensuite on utilise la formule du changement de variable suivante

$$\iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Delta} f(x(r,\theta), y(r,\theta))\,|J_{(r,\theta)}|\,dr\,d\theta ,$$

où

$$J_{(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r}(r,\theta) & \dfrac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta) \\ \dfrac{\partial y}{\partial r}(r,\theta) & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta) \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial r}(r,\theta) \times \frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta) - \frac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta) \times \frac{\partial y}{\partial r}(r,\theta) .$$

Ici nous obtenons

$$J_{(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r \Rightarrow |J_{(r,\theta)}| = r .$$

On rappelle que $f(x,y)=x$ donc $f(x(r,\theta),y(r,\theta))=r\cos\theta$.

$$\iint_{\mathscr{D}} x\,dx\,dy=\iint_{\Delta} r\cos\theta\times r\,dr\,d\theta=\int_0^1\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos\theta\,dr\,d\theta=\int_0^1 r^2\,dr\times\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta=\Big[\frac{r^3}{3}\Big]_0^1\times\Big[\sin\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}\,.$$

b. On pose $\begin{cases} x(\rho,\phi)=\rho\cos\phi\\ y(\rho,\phi)=\rho\sin\phi\end{cases}$

On remplace x et y par leurs expressions respectives en fonction de ρ et ϕ dans les deux inéquations caractérisants le domaine $\mathscr{D}$ pour obtenir des informations sur ρ et ϕ. On a :

- $x^2+(y-1)^2\leq 1\Leftrightarrow(\rho\cos\phi)^2+(\rho\sin\phi-1)^2\leq 1\Leftrightarrow\rho^2-2\rho\sin\phi\leq 0\Leftrightarrow\rho(\rho-2\sin\phi)\leq 0\underset{\text{car }\rho\geq 0}{\Leftrightarrow}(\rho-2\sin\phi)\leq 0$;
- $x\geq 0\Leftrightarrow\phi\in\Big[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\Big]$;
- $x^2+(y-1)^2\leq 1\Rightarrow(y-1)^2\leq 1\Rightarrow -1\leq y-1\leq 1\Rightarrow 0\leq y\leq 2$ et $y\geq 0\Rightarrow\phi\in[0\,;\pi]$;
- On en déduit que $\phi\in\Big[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\Big]\cap[0\,;\pi]=\Big[0\,;\frac{\pi}{2}\Big]$ et $0\leq\rho\leq 2\sin\phi$.

<u>Conclusion :</u> $(x,y)\in\mathscr{D}\Leftrightarrow(\rho,\phi)\in\Delta'=\{(\rho,\phi)\in\mathbb{R}_+\times[0\,;2\pi]\mid 0\leq\phi\leq\frac{\pi}{2}\,,\,0\leq\rho\leq 2\sin\phi\}$. Ensuite on utilise la formule du changement de variable suivante

$$\iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{\Delta'} f(x(\rho,\phi),y(\rho,\phi))\,|J_{(\rho,\phi)}|\,d\rho\,d\phi\,,$$

où $|J_{(\rho,\phi)}|=\rho$. Finalement,

$$\begin{aligned}\iint_{\mathscr{D}} x\,dx\,dy=\iint_{\Delta'}\rho\cos\theta\times\rho\,d\rho\,d\phi&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\sin\phi}\rho^2\cos\phi\,d\rho\,d\phi\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\phi\Big[\frac{\rho^3}{3}\Big]_0^{2\sin\phi}d\phi\\&=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\phi\sin^3\phi\,d\phi=\frac{8}{3}\Big[\frac{\sin^4\phi}{4}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}\,.\end{aligned}$$

Chapitre 4. Exercice A.2.8 Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$

1. Soit $R>0$, on considère le quart de disque $\mathscr{D}_R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq R^2\ ,x\geq 0\ ,\ y\geq 0\}$. On remarque que la fonction ϕ est radiale donc il est plus judicieux d'utiliser les coordonnées polaires pour calculer la double intégrale de ϕ sur $\mathscr{D}_R$. On a

$$\mathscr{D}_R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=r\cos\theta\ ,\ y=r\sin\theta\ ,\ 0\leq r\leq R\ ,\ \theta\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]\right\}\ .$$

En appliquant Fubini, on trouve

$$\iint_{\mathscr{D}_R}\phi(x,y)\,dx\,dy=\iint_{[0\,;R]\times[0\,;\frac{\pi}{2}]}\phi(r\cos\theta,r\sin\theta)\times r\,dr\,d\theta=\int_0^R\int_0^{\frac{\pi}{2}}re^{-r^2}dr\,d\theta=\int_0^R re^{-r^2}dr\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{\pi}{2}\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^R=\frac{\pi}{4}(1-e$$

2. Soit $a>0$, on considère le carré $\mathcal{C}_a=[0\,;a]\times[0\,;a]$. Comme $\phi(x,y)=e^{-x^2}\times e^{-y^2}$, il vient assez facilement que

$$\iint_{\mathcal{C}_a}\phi(x,y)\,dx\,dy=\int_0^a e^{-x^2}dx\times\int_0^a e^{-y^2}dy=\left(\int_0^a e^{-t^2}dt\right)^2\quad\text{en effectuant les changement de variables } x=y=t\ .$$

dans les deux intégrales simples.

Pour la suite il faut remarquer que le carré de côté a contient le quart de disque $\mathscr{D}_a$ et est inclus dans le quart de disque $\mathscr{D}_{a\sqrt{2}}$. En effet :

- $(x,y)\in\mathscr{D}_a\Rightarrow x^2+y^2\leq a^2\Rightarrow x^2\leq a^2$ et $y^2\leq a^2 \underset{\text{car } x\geq 0 \text{ et } y\geq 0}{\Rightarrow} 0\leq x\leq a$ et $0\leq y\leq a\Rightarrow(x,y)\in\mathcal{C}_a$;
- $(x,y)\in\mathcal{C}_a\Rightarrow 0\leq x\leq a$ et $0\leq y\leq a\Rightarrow x^2+y^2\leq 2a^2\Leftrightarrow x^2+y^2\leq(a\sqrt{2})^2 \underset{\text{car } x\geq 0 \text{ et } y\geq 0}{\Rightarrow} (x,y)\in\mathscr{D}_{a\sqrt{2}}$.

Comme ϕ est une fonction positive sur $\mathbb{R}^2$ on a

$$\iint_{\mathscr{D}_a}\phi(x,y)\,dx\,dy\leq\iint_{\mathcal{C}_a}\phi(x,y)\,dx\,dy\leq\iint_{\mathscr{D}_{a\sqrt{2}}}\phi(x,y)\,dx\,dy$$

$$\Leftrightarrow\qquad \frac{\pi}{4}(1-e^{-a^2})\leq\left(\int_0^a e^{-t^2}dt\right)^2\leq\frac{\pi}{4}(1-e^{-2a^2})\ .$$

3. On pose $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\lim_{a\to+\infty}\int_0^a e^{-t^2}dt$.

À l'aide de la double inégalité précédente on peut montrer que la limite existe.

Puisque $\displaystyle\int_0^a e^{-t^2}dt$ est positive on a

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-a^2}}\leq\int_0^a e^{-t^2}dt\leq\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-2a^2}}\ .$$

On a $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\sqrt{1-e^{-a^2}}=1$ et $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\sqrt{1-e^{-2a^2}}=1$. D'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{a\to+\infty}\int_0^a e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ .$$

<u>Conclusion :</u> $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$