Chapitre 4. Exercice A.2.1 Intégrale sur un rectangle

- On remarque que $\mathscr{D} =]-1,1[\times]0,3[$.
- On rappelle que si $f(x,y) = h(x)g(y)$ avec h et g continues et bornées sur les intervalles $]a,b[$ et $]c,d[$ respectivement, alors

$$\iint_{]a,b[\times]c,d[} f(x,y)\,dxdy = \left(\int_a^b h(x)\,dx\right)\left(\int_c^d g(y)\,dy\right).$$

Ainsi avec $h(x) = x^2$ et $g(y) = 1$, on a

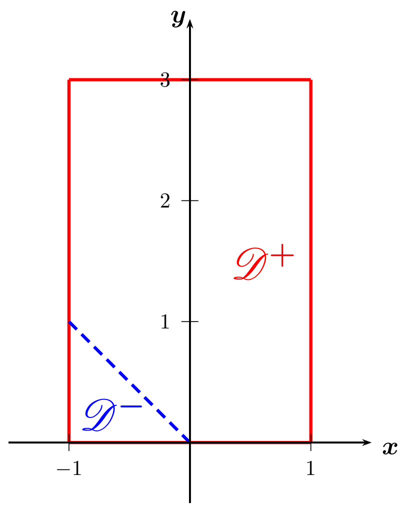
$$\boxed{I_1 = \left(\int_{-1}^1 x^2\,dx\right)\left(\int_0^3 1\,dy\right) = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 \times 3 = 3\left(\tfrac{1}{3} - (-\tfrac{1}{3})\right) = 2}.$$

Et avec $h(x) = x^2$ et $g(y) = y^3$, on a

$$\boxed{I_3 = \left(\int_{-1}^1 x^2\,dx\right)\left(\int_0^3 y^3\,dy\right) = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 \times \left[\frac{y^4}{4}\right]_0^3 = \left(\tfrac{1}{3} - (-\tfrac{1}{3})\right) \times \tfrac{81}{4} = \frac{27}{2}}.$$

- Pour I_2, il faut découper le domaine $\mathscr{D}$ de la façon suivante : $\mathscr{D} = \mathscr{D}^+ \cup \mathscr{D}^-$ avec

$$\mathscr{D}^+ = \{(x,y) \in \mathscr{D}; x+y \geq 0\}, \quad \mathscr{D}^- = \{(x,y) \in \mathscr{D}; x+y < 0\} \quad \text{et} \quad \mathscr{D}^+ \cap \mathscr{D}^- = \varnothing.$$



Ainsi

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathscr{D}} |x+y|\,dxdy &= \iint_{\mathscr{D}^+} |x+y|\,dxdy + \iint_{\mathscr{D}^-} |x+y|\,dxdy \\
&= \iint_{\mathscr{D}^+} (x+y)\,dxdy - \iint_{\mathscr{D}-} (x+y)\,dxdy \\
&= \left(\iint_{\mathscr{D}^+} (x+y)\,dxdy + \iint_{\mathscr{D}-} (x+y)\,dxdy\right) - \iint_{\mathscr{D}-} (x+y)\,dxdy - \iint_{\mathscr{D}-} (x+y)\,dxdy. \\
&= \iint_{\mathscr{D}} (x+y)\,dxdy - 2\iint_{\mathscr{D}-} (x+y)\,dxdy..
\end{aligned}$$

$$\iint_{\mathscr{D}} (x+y)\,dxdy = \iint_{\mathscr{D}} x\,dxdy + \iint_{\mathscr{D}} y\,dxdy = 3\int_{-1}^1 x\,dx + 2\int_0^3 y\,dy = 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^1 + 2\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^3 = 9$$

Le domaine $\mathscr{D}^-$ est un triangle qui se redéfini par

$$\mathscr{D}^- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ -1 < x < 0 \text{ et } 0 < y < -x\}.$$

Ainsi

$$\iint_{\mathscr{D}^-} (x+y)\, dxdy = \int_{-1}^{0} \left(\int_{0}^{-x} (x+y) dy \right) dx = \int_{-1}^{0} \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{-x} dx = \int_{-1}^{0} -\frac{x^2}{2} dx = -\left[\frac{x^3}{6} \right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{6}$$

Finalement

$$\boxed{I_2 = 9 - 2 \times \left(-\frac{1}{6} \right) = 9 + \tfrac{1}{3}}.$$

Chapitre 4. Exercice A.2.2 Interprétation d'une intégrale double

À faire !