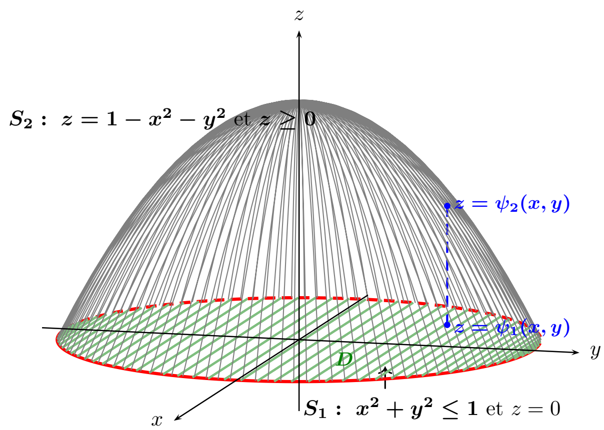
Chapitre 5. Exercice A.2.2 Fubini, coordonnées cylindriques - questions 1 et 2

1. On présente la méthode des bâtons uniquement :

Méthode 1 : bâtons parallèles à (Oz).



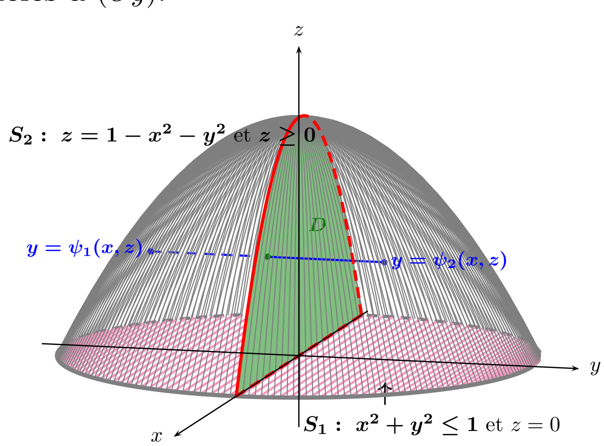
• On projète le volume sur le plan $z = 0$. Le domaine de définition des variables (x, y) est évidemment

$$0 \leq 1 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow \boxed{x^2 + y^2 \leq 1}$$

Il s'agit du disque unité D sur lequel on intègre par *changement de variable en coordonnées polaires.* L'énoncé nous donne directement l'encadrement du bâton parallèle à (Oz) : $\boxed{0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2}$.

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\,dxdydz &= \iint\limits_{D} \left(\int_0^{1-x^2-y^2} f(x,y,z)dz \right) dxdy \\
&= \iint\limits_{[0,1]\times[0,2\pi]} \left(\int_0^{1-r^2} r f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)dz \right) drd\theta \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1-r^2} r f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)dz \right) d\theta \right) dr
\end{aligned}$$

Méthode 2 : bâtons parallèles à (Oy).



• On encadre le bâton parallèle à (Oy) : $z \leq 1 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow \boxed{-\sqrt{1 - x^2 - z} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2 - z}}$.

• Ensuite, on projète le volume sur le plan $y=0$. Le domaine de définition des variables (x,z) est caractérisé par

$$\boxed{0 \leq z} \text{ et le domaine de définition des racines carrées ci-dessus } \boxed{1-x^2-z \geq 0}$$

On en déduit que,

$$D := \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; -1 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 1-x^2\}.$$

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\, dxdydz &= \iint_{D} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2-z}}^{\sqrt{1-x^2-z}} f(x,y,z)dz \right) dxdy \\ &= \int_{-1}^{1} \left(\int_{0}^{1-x^2} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2-z}}^{\sqrt{1-x^2-z}} f(x,y,z)dy \right) dz \right) dx\end{aligned}$$

Méthode 3 : tranches perpendiculaires à (Oz) : on observe que le volume est une superposition de disques (appelés tranches) d'équation $\boxed{x^2+y^2 \leq 1-z}$ pour z fixé.
• D'après la figure, on observe l'encadrement $0 \leq z \leq 1$.

•Pour $0 \leq z \leq 1$ fixé, on note $D_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; x^2+y^2 \leq 1-z\}$. La méthode des tranches consiste à superposer des intégrales surfaciques sur D_z :

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\, dxdydz = \int_0^1 \left(\iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy \right) dz$$

Comme la géométrie de D_z est un disque de rayon $\sqrt{1-z}$ on utilise un changement de variable en coordonnées polaires :

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad \theta \in [0,2\pi] \quad r \in [0,\sqrt{1-z}] \text{ et } J = r$$

donc

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\, dxdydz &= \int_0^1 \left(\iint_{[0,\sqrt{1-z}]\times[0,2\pi]} r f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) dr d\theta \right) dz \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-z}} \left(\int_0^{2\pi} r f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) d\theta \right) dr \right) dz\end{aligned}$$

2. On pose $f(x,y,z)=1$. Le volume est

$$V = \iiint_{\mathcal{V}} 1\, dxdydz = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1-r^2} r dz \right) d\theta \right) dr = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (r-r^3) d\theta \right) dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

ou bien

$$V = \iiint_{\mathcal{V}} 1\, dxdydz = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-z}} \left(\int_0^{2\pi} r d\theta \right) dr \right) dz = 2\pi \int_0^1 \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1-z}} dz = 2\pi \left[-\frac{(1-z)^2}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Chapitre 5. Exercice A.2.6 Fubini

1. Méthode des bâtons. Il faut observer qu'il s'agit de l'intérieur du cylindre $y^2+z^2 \leq 4$ d'axe (Ox), tronqué par 5 plans.

Étudions la méthode des bâtons parallèles à (Ox) (car il s'agit de l'axe du cylindre).

• L'équation du cylindre indique que $0 \leq y \leq 2$ et $0 \leq z \leq 2$.

L'encadrement du bâton est donné par l'énoncé

$$x \geq 0 \quad \text{et} \quad 2-y \leq x \leq 6-2y \quad \Leftrightarrow \quad 2-y \leq x \leq 6-2y \quad (\text{ car } 2-y \geq 0).$$

• On cherche ensuite la projection du volume sur le plan $x=0$: le domaine de définition des couples (y,z) est caractérisé par

$$y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad y^2+z^2 \leq 4 \quad \text{et} \quad \underbrace{\left(2-y \leq 6-2y \Leftrightarrow y \leq 4\right)}_{\text{n'apporte aucune information supplémentaire}}$$

On obtient alors la projection $D := \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 ; y \geq 0 \text{ et } z \geq 0 \text{ et } y^2+z^2 \leq 4\}$ sur laquelle on intègre par changement de variable en coordonnées polaires.

$$y = r\cos\theta, \quad z = r\sin\theta, \quad r \in [0,1], \quad \theta \in [0,2\pi[\quad \text{et } J = r.$$

Finalement

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_D \left(\int_{2-y}^{6-2y} f(x,y,z)dx\right) dydz = \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{2-r\cos\theta}^{6-2r\cos\theta} rf(x,r\cos\theta,r\sin\theta)dx\right) dr\right) d\theta$$

2. On pose $f(x,y,z) = z = r\sin\theta$.

$$\begin{aligned}
\iiint_{\mathcal{V}} z\,dxdydz &= \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{2-r\cos\theta}^{6-2r\cos\theta} r^2\sin\theta dx\right) dr\right) d\theta \\
&= \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\sin\theta(4-r\cos\theta)dr\right) d\theta \\
&= \int_0^2 \left[-4r^2\cos\theta + r^3\frac{\cos^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} dr = \int_0^2 (4r^2 - \frac{r^3}{2})dr = \left[\frac{4r^3}{3} - \frac{r^4}{8}\right]_0^2 = \frac{26}{3}
\end{aligned}$$