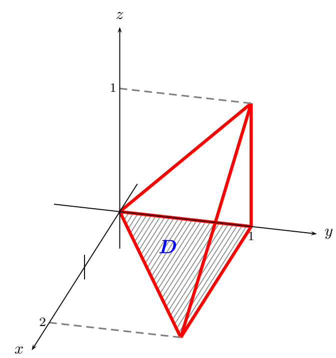
Chapitre 5. Exercice A.2.1 Fubini

1. La méthode des bâtons consiste à déterminer la projection du volume dans l'un des trois plans $(x = 0)$, ou $(y = 0)$ ou $(z = 0)$ puis de déterminer les équations des faces inférieures et supérieures selon les directions (Ox), (Oy) ou (Oz) respectivement .

méthode des bâtons // à (Oz) : projection sur le plan $z = 0$: cela correspond au domaine de définition des variables (x, y)

$$\boxed{x \geq 0 \quad y \leq 1} \text{ et } (z \geq 0 \text{ et } 2z \leq 2y - x) \Rightarrow \boxed{2y - x \leq 0}$$

Ceci définit la projection $D_{(z=0)} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0 \quad y \leq 1 \text{ et } 2y - x \geq 0\} = \{0 \leq x \leq 2 \text{ et } \frac{x}{2} \leq y \leq 1\}$.



Ensuite pour chaque point $(x, y) \in D_{(z=0)}$ on encadre le baton parallèle à (Oz) avec les données de l'énoncé :

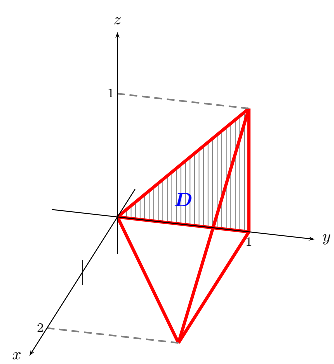
$$\boxed{0 \leq z \leq y - \frac{x}{2}}.$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x, y, z)\, dxdydz = \iint_{D_{(z=0)}} \left(\int_0^{y-\frac{x}{2}} f(x, y, z) dz \right) dydz = \int_0^2 \left(\int_{\frac{x}{2}}^1 \left(\int_0^{y-\frac{x}{2}} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

méthode des bâtons // à (Ox) : projection sur le plan $x = 0$: cela correspond au domaine de définition des variables (y, z)

$$\boxed{z \geq 0 \quad y \leq 1} \text{ et } (0 \leq x \text{ et } x \leq 2y - 2z) \Rightarrow \boxed{2y - 2z \geq 0}$$

Ceci définit la projection $D_{(x=0)} := \{(y, z) \in \mathbb{R}^2; z \geq 0 \quad y \leq 1 \text{ et } y \geq z\} = \{0 \leq y \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq y\}$.



Ensuite pour chaque point $(y, z) \in D_{(x=0)}$ on encadre le baton parallèle à (Ox) avec les données de l'énoncé :

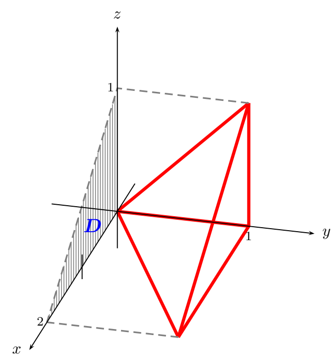
$$\boxed{0 \leq x \leq 2y - 2z}.$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_{D_{(x=0)}} \left(\int_0^{2y-2z} f(x,y,z)dx\right) dydz = \int_0^1 \left(\int_0^y \left(\int_0^{2y-2z} f(x,y,z)dx\right) dz\right) dy$$

méthode des bâtons // à (Oy) : projection sur le plan $y=0$: cela correspond au domaine de définition des variables (x,z)

$$\boxed{x \geq 0 \quad z \geq 0} \text{ et } (y \leq 1 \text{ et } x+2z \leq 2y) \Rightarrow \boxed{x+2z \leq 2}$$

Ceci définit la projection $D_{(y=0)} := \{(x,z) \in \mathbb{R}^2; z \geq 0 \quad x \geq 0 \text{ et } x+2z \leq 2\} = \{0 \leq z \leq 1 \text{ et } 0 \leq x \leq 2-2z\}$.



Ensuite pour chaque point $(x,z) \in D_{(y=0)}$ on encadre le baton parallèle à (Oy) avec les données de l'énoncé :

$$\boxed{\tfrac{x}{2} + z \leq y \leq 1}.$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_{D_{(y=0)}} \left(\int_{\frac{x}{2}+z}^{1} f(x,y,z)dy\right) dydz = \int_0^1 \left(\int_0^{2-2z} \left(\int_{\frac{x}{2}+z}^{1} f(x,y,z)dy\right) dx\right) dz$$

$$m = \iiint_{\mathcal{V}} 1\,dxdydz = \frac{1}{3}$$

$$x_G = \frac{1}{m}\iiint_{\mathcal{V}} x\,dxdydz = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$y_G = \frac{1}{m}\iiint_{\mathcal{V}} y\,dxdydz = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$z_G = \frac{1}{m}\iiint_{\mathcal{V}} z\,dxdydz = 3 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

$$
\begin{aligned}
m &= \int_0^1 \left(\int_0^y \left(\int_0^{2y-2z} 1dx\right) dz\right) dy \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^y (2y-2z)\, dz\right) dy = \int_0^1 \Big[2yz - z^2\Big]_0^y dy = \int_0^1 (2y^2 - y^2)\, dy = \int_0^1 y^2\, dy = \Big[\frac{y^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_G = 3\int_0^1 \left(\int_0^y \left(\int_0^{2y-2z} x\, dx\right) dz\right) dy &= 3\int_0^1 \left(\int_0^y \Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^{2y-2z} dz\right) dy \\
&= 3\int_0^1 \left(\int_0^y \frac{(2y-2z)^2}{2} dz\right) dy \\
&= 3\int_0^1 \left(\int_0^y 2(y-z)^2 dz\right) dy \\
&= 3\int_0^1 \Big[-\frac{2(y-z)^3}{3}\Big]_0^y dy = 3\int_0^1 \frac{2y^3}{3}\, dy = 3\Big[\frac{2y^4}{12}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_G &= 3\int_0^1 \left(\int_0^y \left(\int_0^{2y-2z} y\, dx\right) dz\right) dy \\
&= 3\int_0^1 \left(\int_0^y y(2y-2z) dz\right) dy = 3\int_0^1 \Big[2y^2 z - yz^2)\Big]_0^y dy = 3\int_0^1 y^3\, dy = 3\Big[\frac{y^4}{4}\Big]_0^1 = \frac{3}{4}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_G &= 3\int_0^1 \left(\int_0^y \left(\int_0^{2y-2z} z\, dx\right) dz\right) dy \\
&= 3\int_0^1 \left(\int_0^y z(2y-2z) dz\right) dy = 3\int_0^1 \Big[yz^2 - \frac{2z^3}{3}\Big]_0^y dy = 3\int_0^1 \frac{y^3}{3}\, dy = 3\Big[\frac{y^4}{12}\Big]_0^1 = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$