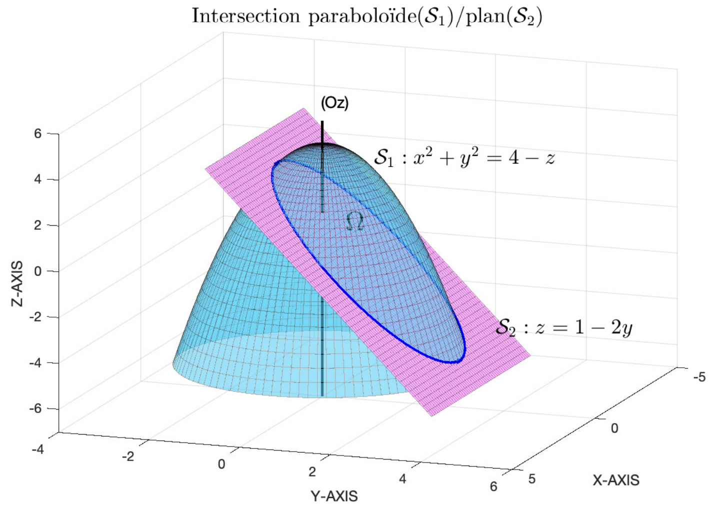
Chapitre 5. Exercice A.2.4 Fubini

On définit le volume

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, z + x^2 + y^2 \leq 4 \text{ et } z + 2y \geq 1\}\ .$$



2. (a) La projection de Ω sur le plan $z = 0$ est le domaine de définition des variables (x, y) : On a

$$z \leq 4 - x^2 - y^2 \quad \text{ et } \quad z \geq 1 - 2y\ .$$

En concaténant les inégalités, on en déduit que les couples (x, y) vérifient

$$1 - 2y \leq 4 - x^2 - y^2$$

Il faut reconnaître l'inéquation d'un disque sous forme développée. Il faut la mettre sous forme canonique :

$$x^2 + y^2 - 2y \leq 3 \quad \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 \leq 4$$

Il s'agit donc du disque $D_{(a)}$ de centre $(0, 1)$ et de rayon 2. Avec les calculs effectués on peut écrire

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\ (x,y) \in D_{(a)} \text{ et } 1 - 2y \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}\ .$$

Pour intégrer sur $D_{(a)}$ il faut avoir le réflexe d'effectuer un changement de variable en coordonnées polaires

$$M \in D_{(a)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ 1 + r\sin\theta \end{pmatrix},\ \text{avec } r \in [0,2] \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[.$$

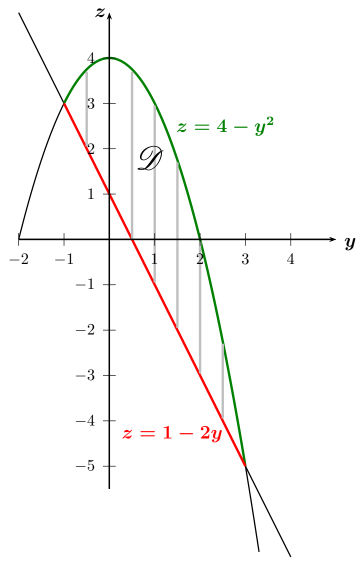
2. (b) La projection de Ω sur le plan $x = 0$ est le domaine de définition des variables (y, z) : On a

$$x^2 \leq 4 - y^2 - z \quad \text{ et } z + 2y \geq 1.$$

Un minorant évident de x^2 est 0 donc les inéquations caractérisant la projection de Ω sur $x = 0$ sont

$$0 \leq 4 - y^2 - z \quad \text{ et } \quad z + 2y \geq 1.$$

Maintenant, faisons une figure 2d pour appliquer la formule de Fubini à la projection de Ω sur $x = 0$.



Le domaine de définition des variables (y, z) peut être décrit sous la forme

$$D_{(b)} = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; -1 \leq y \leq 3 \text{ et } 1 - 2y \leq z \leq 4 - y^2\}.$$

(Pour appliquer l'autre formule de Fubini, il faudrait découper le domaine en 2 sous-domaines.)
Avec les calculs effectués on peut écrire

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; (y, z) \in D_{(b)} \text{ et } -\sqrt{4 - y^2 - z} \leq x \leq \sqrt{4 - y^2 - z}\} \,.$$

2. (c) Passez cette question car elle est liée à la méthode des tranches.

3. Avec la question **2. (a)** on btient la formule suivante

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega f(x, y, z)\, dxdydz &= \iint_{D_{(a)}} \left(\int_{1-2y}^{4-x^2-y^2} f(x, y, z)\, dz \right) dxdy \\ &= \iint_{[0,2]\times[0,2\pi[} \left(\int_{-1-2r\sin\theta}^{3-2r\sin\theta - r^2} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, dz \right) \times r \; drd\theta\end{aligned}$$

Avec les question **2. (b)** on obtient les deux formules suivantes

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega f(x, y, z)\, dxdydz &= \iint_{D_{(b)}} \left(\int_{-\sqrt{4-y^2-z}}^{\sqrt{4-y^2-z}} f(x, y, z)\, dx \right) dydz \\ &= \int_{-1}^{3} \left(\int_{1-2y}^{4-y^2} \left(\int_{-\sqrt{4-y^2-z}}^{\sqrt{4-y^2-z}} f(x, y, z)\, dx \right) dz \right) dy\end{aligned}$$

4. Le volume :

$$\begin{aligned}Vol(\Omega) &= \iint_{[0,2]\times[0,2\pi[} \left(\int_{-1-2r\sin\theta}^{3-2r\sin\theta - r^2} 1\, dz \right) \times r \; drd\theta \\ &= \iint_{[0,2]\times[0,2\pi[} r(4 - r^2) drd\theta = \int_0^{2\pi} 1 d\theta \times \int_0^2 r(4 - r^2) dr = 2\pi \left[2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 = \boxed{8\pi}\end{aligned}$$

Recalculons le volume avec la 2ème formule

$$
\begin{aligned}
Vol(\Omega) &= \int_{-1}^{3}\left(\int_{1-2y}^{4-y^2}\left(\int_{-\sqrt{4-y^2-z}}^{\sqrt{4-y^2-z}} 1\,dx\right)dz\right)dy \\
&= \int_{-1}^{3}\left(\int_{1-2y}^{4-y^2} 2\sqrt{4-y^2-z}\,dz\right)dy \\
&= \int_{-1}^{3}\Big[-2\times\frac{2}{3}(4-y^2-z)^{\frac{3}{2}}\Big]_{1-2y}^{4-y^2}dy = \frac{4}{3}\int_{-1}^{3}(3+2y-y^2)^{\frac{3}{2}}\,dy
\end{aligned}
$$

Il faut terminer le calcul par un changement de variable avec sin :

$$
3+2y-y^2 = 4\left(1-(\frac{y-1}{2})^2\right) \quad \Rightarrow (3+2y-y^2)^{\frac{3}{2}} = 8\left(1-(\frac{y-1}{2})^2\right)^{\frac{3}{2}}.
$$

On pose $\sin\theta = \frac{y-1}{2}$ et on obtient

$$
y=-1 \Leftrightarrow -1=\sin\theta \Leftrightarrow \theta=-\frac{\pi}{2}
$$

$$
y=3 \Leftrightarrow 1=\sin\theta \Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{2}
$$

$$
y = 1+2\sin\theta \quad \Rightarrow \quad dy = 2\cos\theta d\theta
$$

$$
\begin{aligned}
Vol(\Omega) &= \frac{4}{3}\times 8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\times 2\cos\theta\,d\theta \\
&= \frac{4\times 8\times 2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{8}+\frac{\cos(4\theta)}{8}+\frac{3\cos(2\theta)}{8}\right)d\theta = \frac{4\times 8\times 2}{3}\Big[\frac{3\theta}{8}+\frac{\sin(4\theta)}{32}+\frac{\sin(2\theta)}{4}\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 8\pi
\end{aligned}
$$

Chapitre 5. Exercice A.2.6 Fubini

Autres possibilités : méthode des tranches.

(i) Comme le volume $\mathcal{V}$ est délimité par les plans d'équation $y = 0$ et $y = 2$, on peut superposer des tranches entre ces deux plans pour reconstituer le volume. On a

$$\mathcal{V} := \big\{ y \in [0,2]; (x,z) \in \mathscr{D}_y \big\} \quad \text{où } \mathscr{D}_y := \{0 \leq z \leq \sqrt{4-y^2} \text{ et } 2-y \leq x \leq 6-2y\}.$$

Ainsi, l'intégrale triple se réécrit

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\, dxdydz = \int_0^2 \left(\iint\limits_{\mathscr{D}_y} f(x,y,z) dxdz \right) dy = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-y^2}} \left(\int_{2-y}^{6-2y} f(x,y,z) dx \right) dz \right) dy$$

$$= \int_0^2 \left(\int_{2-y}^{6-2y} \left(\int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y,z) dz \right) dx \right) dy.$$

(ii) De même, comme le volume $\mathcal{V}$ est délimité par les plans d'équation $z = 0$ et $z = 2$, on peut superposer des tranches entre ces deux plans pour reconstituer le volume. On a

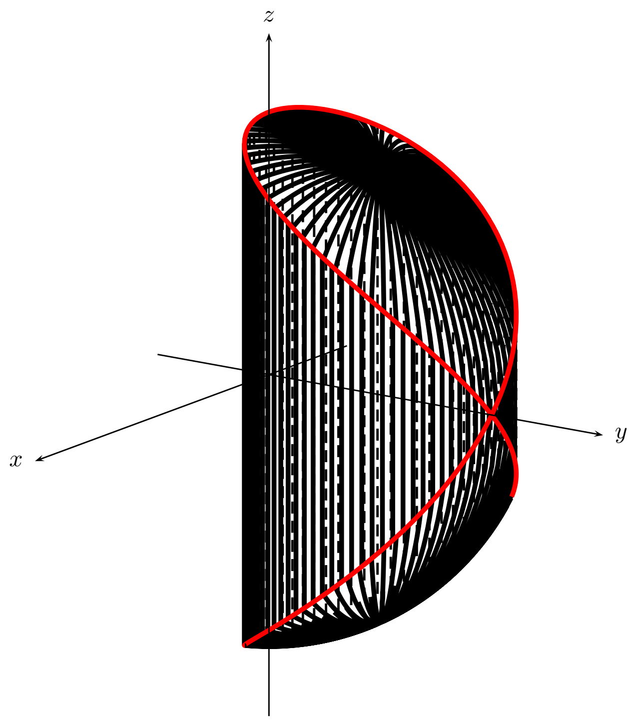
$$\mathcal{V} := \big\{ z \in [0,2]; (x,y) \in \mathscr{D}_z \big\} \quad \text{où } \mathscr{D}_z := \{0 \leq y \leq \sqrt{4-z^2} \text{ et } 2-y \leq x \leq 6-2y\}.$$

Ainsi, l'intégrale triple se réécrit

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\, dxdydz = \int_0^2 \left(\iint\limits_{\mathscr{D}_z} f(x,y,z) dxdy \right) dz = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-z^2}} \left(\int_{2-y}^{6-2y} f(x,y,z) dx \right) dy \right) dz.$$

Chapitre 5. Exercice A.2.7 Intersection sphère-cylindre

Soient $R > 0$ et $\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\ ,\ x^2 + (y - \frac{R}{2})^2 \leq \frac{R^2}{4}\}$.
Cela correspond au domaine délimité par le cylindre de révolution autour de l'axe parralèle à (Oz) passant par le point $(0\,; \frac{R}{2}\,; 0)$ et de rayon $\frac{R}{2}$ et par la sphère de rayon R.



Pour intégrer sur $\mathcal{V}$ on peut utiliser la méthode des bâtons parallèles à (Oz) :

- Encadrement de la variable z : $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \Rightarrow \boxed{-\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} \leq z \leq \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}}$.
- Domaine de définition des variables (x, y) :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + (y - \tfrac{R}{2})^2 \leq \tfrac{R^2}{4} \text{ et } \underbrace{x^2 + y^2 \leq R^2}_{\text{inutile}}\}.$$

On a tout d'abord

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_D \left(\int_{-\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}}^{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}} f(x, y, zdz \right) dxdy.$$

On effectue un changement de variable en coordonnées polaire :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$x^2 + (y - \tfrac{R}{2})^2 \leq \tfrac{R^2}{4} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - Ry \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq Ry.$$

On en déduit que $y \geq 0 \Rightarrow \boxed{0 \leq \theta \leq \pi}$ et que $r \leq R\sin\theta$.
L'intégrale triple peut donc se réécrire

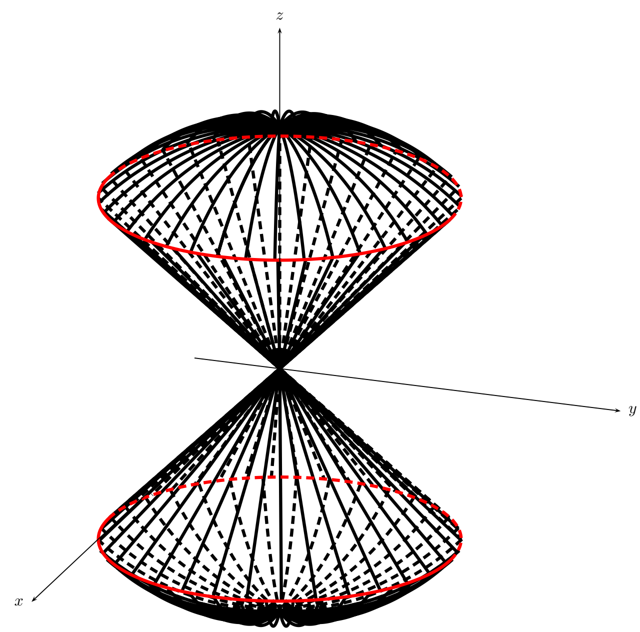
$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_0^{\pi} \left(\int_0^{R\sin\theta} \left(\int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) \times r\, dz \right) dr \right) d\theta\ .$$

Le volume est donc (avec $f(x,y,z)=1$)

$$
\begin{aligned}
\iiint_{\mathcal{V}} dx\,dy\,dz &= \int_0^{\pi}\left(\int_0^{R\sin\theta}\left(\int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} r\,dz\right)dr\right)d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\left(\int_0^{R\sin\theta} 2r\sqrt{R^2-r^2}\,dr\right)d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\left[-\frac{2}{3}(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{R\sin\theta}d\theta \\
&= -\frac{2}{3}\int_0^{\pi}\left[(R^2-(R\sin\theta)^2)^{\frac{3}{2}}-(R^2-0^2)^{\frac{3}{2}}\right]d\theta \\
&= -\frac{2}{3}\int_0^{\pi}\left[(R^2-R^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}-R^3\right]d\theta \\
&= -\frac{2}{3}\int_0^{\pi}R^3\left[(1-\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}-1\right]d\theta \\
&= -\frac{2}{3}\int_0^{\pi}R^3\left(|\cos\theta|^3-1\right)\,d\theta \\
&= -\frac{2R^3}{3}\left(-\pi+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,d\theta\right) \\
&= \frac{2\pi R^3}{3}-\frac{4R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta(1-\sin^2\theta)\,d\theta \\
&= \frac{2\pi R^3}{3}-\frac{4R^3}{3}\left[\sin\theta-\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{2\pi R^3}{3}-\frac{8R^3}{9}}
\end{aligned}
$$

Chapitre 5. Exercice A.2.8 Intersection sphère cône

Soit $R > 0$. On considère le volume défini par $\mathcal{V} = \left\{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \text{ et } x^2 + y^2 \leq z^2\right\}$.



Le volume est donné par la formule $\boxed{\displaystyle\iiint_{\mathcal{V}} 1\, dxdydz.}$

Par symétrie orthogonale par rapport au plan $\{z = 0\}$ nous pouvons se ramener au calcul du volume du demi-cône supérieur :

$$\iiint_{\mathcal{V}} 1\, dxdydz = 2 \iiint_{\mathcal{V}_1} 1\, dxdydz$$

où $\boxed{\mathcal{V}_1 = \left\{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \text{ et } x^2 + y^2 \leq z^2 \text{ et } z \geq 0\right\}.}$

• Nous allons utiliser la méthodes des bâtons, c'est-à-dire écrire le volume $\mathcal{V}_1$ sous la forme

$$\mathcal{V} = \{(x, y) \in \mathscr{D}\, ; h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\}$$

• Dans ce cas $\mathscr{D}$ est la projection de $\mathcal{V}_1$ dans le plan $z = 0$:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}_1 = \{z^2 \leq R^2 - x^2 - y^2 \text{ et } x^2 + y^2 \leq z^2 \text{ et } z \geq 0\} \\
&\Rightarrow x^2 + y^2 \leq R^2 - x^2 - y^2 \\
&\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 \leq R^2 .
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathscr{D}$ est le disque de rayon $\frac{R}{\sqrt{2}}$ et de centre (0,0).

• Pour un point $(x, y) \in \mathscr{D}$ fixé, on doit déterminer la borne inférieure $h_1(x, y)$ et la borne supérieure $h_2(x, y)$de z :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}_1 = \{z^2 \leq R^2 - x^2 - y^2 \text{ et } x^2 + y^2 \leq z^2 \text{ et } z \geq 0\} \\
&\Rightarrow x^2 + y^2 \leq z^2 \leq R^2 - x^2 - y^2 \text{ et } z \geq 0 \\
&\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} .
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant calculer le volume de $\mathcal{V}_1$

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}_1} 1\,dxdydz = \iint\limits_{\mathscr{D}} \Big(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} 1\,dz \Big) dxdy$$

Maintenant au procède au changement de variable en coordonnées polaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{array} \right. \quad \text{et } \theta \in [0, 2\pi] \text{ et } \rho \in [0, \frac{R}{\sqrt{2}}] \text{ et } J(\rho,\theta) = \rho.$$

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\mathcal{V}_1} 1\,dxdydz &= \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \Big(\int_{\rho}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} 1\,dz \Big) \rho\,d\rho \Big) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} (\sqrt{R^2-\rho^2} - \rho)\rho\,d\rho \Big) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \Big[-\frac{(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{\rho^3}{3} \Big]_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} d\theta = \int_0^{2\pi} (-\frac{R^3}{3\sqrt{2}} + \frac{R^3}{3}) d\theta = \pi R^3 \frac{2-\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

Finalement $\boxed{\displaystyle\iiint\limits_{\mathcal{V}} 1\,dxdydz = \pi R^3 \frac{4-2\sqrt{2}}{3}.}$