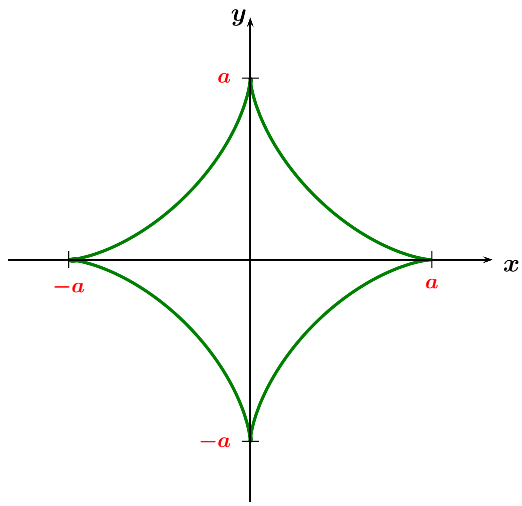
Chapitre 6. Exercice A.2.2 Question (1)



La courbe ci-dessous est entièrement parcourue en considérant $u \in [0, 2\pi[$. Pour des raisons de symétries d'axes (Ox) et (Oy), la longueur de la courbe est

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2}\, du = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2}\, du$$

Calculons

$$\begin{aligned}
(x'(u))^2 + (y'(u))^2 &= (-3a \sin u \cos^2 u)^2 + (3a \cos u \sin^2 u)^2 \\
&= 9a^2 (\sin^2 u \cos^4 u + \cos^2 u \sin^4 u) \\
&= 9a^2 \sin^2 u \cos^2 u \underbrace{(\cos^2 u + \sin^2 u)}_{=1} = 9a^2 \sin^2 u \cos^2 u
\end{aligned}$$

$$\ell = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3|a| \sin u \cos u\, du = 12|a| \left[\frac{\sin^2 u}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6|a|$$

Chapitre 6. Exercice A.2.4

Dans cet exercice, on réécrit l'intersection sphère/plan en une intersection cylindre plan que nous savons paramétrer (cf chap 3 ex A.2.7)

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ z=2(R-y) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+4(R-y)^2=R^2 \\ z=2(R-y) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2+5y^2-8Ry=-3R^2 \\ z=2(R-y) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2+5(y-\frac{4}{5}R)^2-\frac{16}{5}R^2=-3R^2 \\ z=2(R-y) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2+5(y-\frac{4}{5}R)^2=\frac{1}{5}R^2 \\ z=2(R-y) \end{array}\right.$$

Une paramétrisation de la cette courbe est

$$M(x,y,z)\in\mathscr{C} \quad\Leftrightarrow\quad M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{R}{\sqrt{5}}\cos\theta \\ \frac{4}{5}R+\frac{R}{5}\sin\theta \\ 2\left(\frac{R}{5}-\frac{R}{5}\sin\theta\right) \end{pmatrix} \text{ et } \theta\in[0,2\pi[.$$

La longueur de la courbe $\mathscr{C}$ est donc

$$\ell(\mathscr{C}) = \int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{R^2}{5}\sin^2\theta+\frac{R^2}{25}\cos^2\theta+4\frac{R^2}{25}\cos^2\theta}\,d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{R}{\sqrt{5}}\,d\theta = \boxed{\frac{2\pi R}{\sqrt{5}}}.$$

Chapitre 6. Exercice A.2.6

1. Le champ de vecteur $\vec{V}(P(x,y),Q(x,y))$ dérive d'un potentiel scalaire si $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=0.$$

Or, pour $\vec{V}(y^2,x^2)$, on a

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=2x-2y,$$

donc $\vec{V}$ ne dérive pas d'un potentiel scalaire.

2. Une paramétrisation d'un cercle du plan s'écrit

$$(x,y)\in\mathscr{C} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+R\cos\theta \\ b+R\sin\theta \end{pmatrix} \text{ avec } \theta\in[0,2\pi[\ .$$

On doit déterminer (a,b,R) de sorte que la circulation de $\vec{V}(y^2,x^2)$ soit nulle le long de $\mathscr{C}$.
On a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathscr{C}}\vec{V}\cdot d\vec{\ell}=\int_{\mathscr{C}}y^2dx+x^2dy &= \int_0^{2\pi}(b+R\sin\theta)^2\times(-R\sin\theta)d\theta+(a+R\cos\theta)^2\times(R\cos\theta)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[-b^2R\sin\theta-2bR^2\sin^2\theta-R^3\sin^3\theta+a^2R\cos\theta+aR^2\cos^2\theta+R^3\cos^3\theta\right]d\theta \\
&= \Bigg[b^2R\cos\theta-bR^2\left(\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right)-R^3\left(-\cos\theta+\frac{\cos^3\theta}{3}\right) \\
&\qquad +a^2R\sin\theta+aR^2\left(\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right)+R^3\left(\sin\theta-\frac{\sin^3\theta}{3}\right)\Bigg]_0^{2\pi} \\
&= \boxed{R^2(a-b)}\ .
\end{aligned}$$

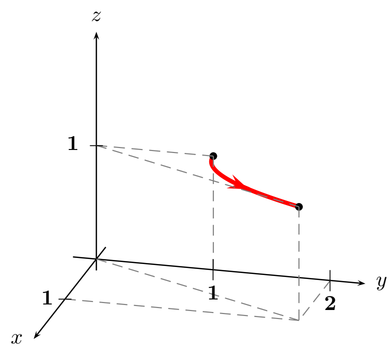
On en déduit que

$$\int_{\mathscr{C}}\vec{V}\cdot d\vec{\ell}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{a=b}\ .$$

Chapitre 6. Exercice A.2.7 Circulation

4. Dans cette question la paramétrisation de $\mathscr{C}$ vous est déjà donnée (le paramètre est x).

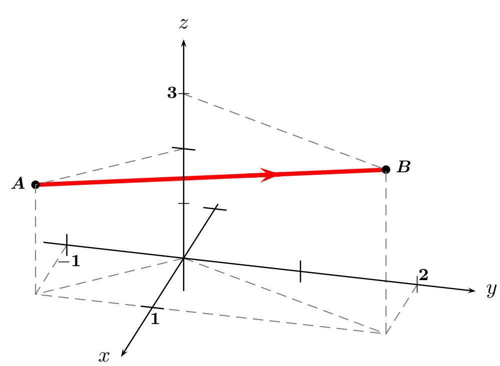
$$\begin{cases} x &= t \\ y &= 1+t^2 \\ z &= 1 \end{cases} \qquad \text{avec } 0 \leq t \leq 1.$$



Avec $V = \begin{pmatrix} x^2y \\ y^2z \\ z^2x \end{pmatrix}$ on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\mathscr{C}}(\vec{V}) &= \int_0^1 t^2(1+t^2)(1\,dt) + (1+t^2)^2(2t\,dt) + t \times 0\,dt \\
&= \int_0^1 \left[t^2 + t^4 + 2t + 4t^3 + 2t^5\right]\,dt \\
&= \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + t^2 + t^4 + \frac{t^6}{3}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + 1 + 1 + \frac{1}{3} = \frac{5+3+15+15+5}{15} = \boxed{\frac{43}{15}}.
\end{aligned}$$

5. On obtient la figure suivante



Pour paramétrer un point $M(x,y,z)$ parcourant un segment $[AB]$, on a la caractérisation suivante

$$\begin{aligned}
M(x,y,z) \in \overrightarrow{AB} \quad &\Leftrightarrow \quad M = (1-t)\,A + tB\,, \quad \text{avec } t: 0 \to 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x &= (1-t)\times 1 + t \times 1 = 1 \\ y &= (1-t)\times 2 + t\times(-1) = 2-3t \\ z &= (1-t)\times 3 + t \times 2 = 3-t \end{cases} \qquad \text{avec } t: 0 \to 1
\end{aligned}$$

La direction $\overrightarrow{AB}$ correspond au sens $t : 1 \to 0$.

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\mathscr{C}}(\overrightarrow{V}) = \int_{\mathscr{C}} (y+z)\,dx + (x+z)\,dy + (x+y)\,dz &= \int_0^1 0 + (4-t)\times(-3dt) + (3-3t)\times(-dt) \\ &= \Big[3t^2 - 15t\Big]_0^1 = \boxed{-12}\,.\end{aligned}$$

Chapitre 6. Exercice A.2.8 Green-Riemann

1. $\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ 0 \leq x \leq 1 \text{ et } x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.

• On oriente le bord $\mathscr{C}$ de $\mathscr{D}$ dans le sens trigonométrique. On a alors $\mathscr{C} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ où

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Gamma_1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad t : 0 \mapsto 1.$$

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Gamma_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}, \quad t : 1 \mapsto 0.$$

La circumation de $\vec{V}(2y, x)$ le long de $\mathscr{C}$ est

$$\begin{aligned}
\int_{\mathscr{C}} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} &= \int_{\Gamma_1} 2ydx + xdy + \int_{\Gamma_2} 2ydx + xdy \\
&= \int_0^1 2t^2 \times 1dt + t \times 2tdt + \int_1^0 2t \times 2tdt + t^2 \times 1dt \\
&= \int_0^1 4t^2\, dt + \int_1^0 5t^2 dt = -\int_0^1 t^2 dt = \boxed{-\frac{1}{3}}.
\end{aligned}$$

• La courbe $\mathscr{C}$ étant parcourue dans le sens trigonométrique et sans point double, on peut retrouver ce résultat avec le théorème de Green-Riemann

$$\int_{\mathscr{C}} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\mathscr{D}} (-1)dxdy = -\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} 1dy \right) dx = -\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = -\Big[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \Big]_0^1 = -\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) = \boxed{-\frac{1}{3}}.$$

2. On a $x^2 + y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1$. La courbe $\mathscr{C}$ est donc un cercle de centre $(0,1)$ et de rayon 1. Une paramétrisation de $\mathscr{C}$ est donc

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{C} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 1 + \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \theta : 0 \mapsto 2\pi\ .$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\int_{\mathscr{C}} xy^2 dy - yx^2 dx &= \int_0^{2\pi} \cos\theta(1+\sin\theta)^2 \times \cos\theta d\theta - (1+\sin\theta)\cos^2\theta \times (-\sin\theta) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\cos^2\theta + 3\sin\theta\cos^2\theta + \sin^2\theta\cos^2\theta \right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\cos^2\theta + 3\sin\theta\cos^2\theta + \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2} + 3\sin\theta\cos^2\theta + \frac{1-\cos 4\theta}{4} \right) d\theta \\
&= \Big[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} - \frac{\cos^3\theta}{3} + \frac{\theta}{4} - \frac{\sin 4\theta}{4} \Big]_0^{2\pi} = \boxed{\frac{3\pi}{2}}.
\end{aligned}$$

La courbe $\mathscr{C}$ est le bord du disque $\mathscr{D} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$ parcourue dans le sens trigonométrique et sans point double. Les fonctions P et Q définies par

$$P(x,y) = -yx^2 \quad \text{ et } Q(x,y) = xy^2$$

étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{D}$on a

$$\int_{\mathscr{C}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_{\mathscr{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial x}(x,y)\right) dxdy = \iint_{\mathscr{D}} (x^2+y^2) dxdy \ .$$

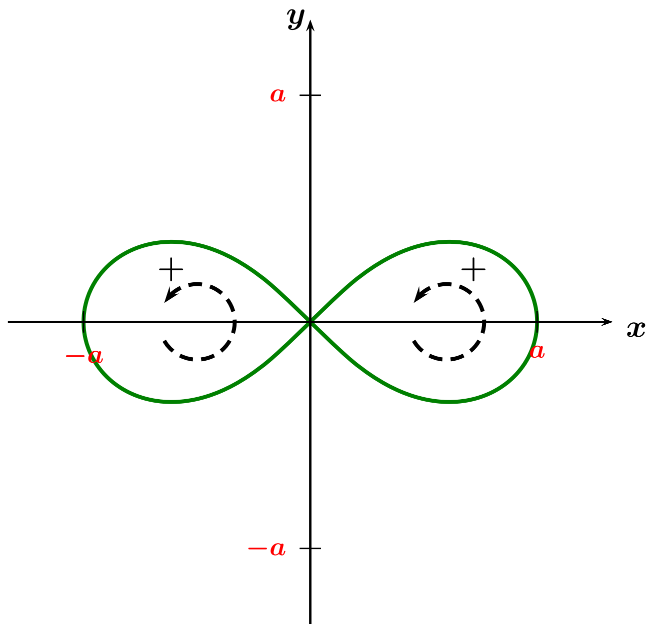
On effectue un changement de variable en coordonnées polaires

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{D} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ 1+r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad r \in [0,1] \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[\ .$$

Le jacobien est $J_\phi = r$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathscr{C}} xy^2dy - yx^2dx &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (r^2 + 2r\sin\theta + 1) \times r \, rd\theta\right) dr \\ &= \int_0^1 r\Big[(r^2+1)\theta - 2r\cos\theta\Big]_0^{2\pi} dr = \int_0^1 2\pi(r^2+1)dr = 2\pi\left[\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \boxed{\frac{3\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Chapitre 6. Exercice A.2.9 Question 4 - Une courbe en huit



Une courbe paramétrée en coordonnées polaires est définie par la donnée du rayon $r(\theta)$ en fonction de l'angle θ parcourant le cercle trigonométrique : on obtient alors

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\theta)\cos\theta \\ r(\theta)\sin\theta \end{pmatrix}$$

Le domaine de définition I de θ est le domaine de définition de r dans $[0,\, 2\pi]$. L'aire s'obtient plus facilement avec la formule

$$Aire(D) = \frac{1}{2}\int_I x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_I (r(\theta))^2 d\theta \quad \text{(à redémontrer)}$$

Pour la Lemniscate de Bernouilli on a $r(\theta) = a\sqrt{\cos(2\theta)}$ avec $a > 0$ fixé. Le domaine de définition du paramètre θ est caractérisé par l'inéquation

$$\cos(2\theta) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\theta \mod[2\pi] \in [-\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2}] \quad \Leftrightarrow \quad \theta \mod[\pi] \in [-\tfrac{\pi}{4}; \tfrac{\pi}{4}].$$

Les valeurs de $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ permettent de parcourir la boucle de droite et les valeurs de $\theta \in [\pi - \frac{\pi}{4}; \pi + \frac{\pi}{4}]$ permettent de parcourir la boucle de gauche.
Pour parcourir les deux boucles dans le sens direct, il faut faire varier θ dans le sens croissant $-\frac{\pi}{4} \to \frac{\pi}{4}$ puis $\pi - \frac{\pi}{4} \to \pi + \frac{\pi}{4}$. Par symétrie, l'aire est alors obtenue par la formule

$$Aire(D) = \frac{1}{2} \times 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (a\sqrt{\cos(2\theta)})^2 d\theta = a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta)\,d\theta = a^2\Big[\frac{\sin(2\theta)}{2}\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

Chapitre 6. Exercice A.2.11 Sur les hypothèses du théorème de Green-Riemann

1. La paramétrisation de Γ parcourue dans le sens trigonométrique est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \cos\theta \\ y & = & \sin\theta \end{array}\right. \qquad \theta : 0 \to 2\pi$$

L'équation de Γ est $x^2+y^2=1$ donc

$$\int_\Gamma \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = \int_\Gamma xdy-ydx = \int_0^{2\pi} \cos\theta\times\cos\theta\,d\theta - \sin\theta\times(-\sin\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi} 1\,d\theta = 2\pi.$$

2. On remarque que la circulation que l'on vient de calculer correspond au travail de la force

$$\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \\ Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

le long de Γ. La question est : peut-on appliquer le théorème de Green-Riemann pour calculer cette circulation ?
Les hypothèses sur Γ sont bien vérifiées : c'est le bord fermé et sans point double du disque unité. La circulation a été calculée est respectant le sens trigonométrique. Il reste à vérifier les hypothèses sur P et Q.
L'intégrale

$$\iint_{\mathscr{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dxdy$$

existe si l'intégrand est continu en tout point $(x_0,y_0)\in\mathscr{D}$ (sauf sur une partie d'aire nulle) et bornée.
Pour $(x,y)\neq(0,0)$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= \frac{1}{x^2+y^2} + (x)\times\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2} - \left(\frac{-1}{x^2+y^2} + (-y)\times\left(\frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}\right)\right)\\ &= \frac{2}{x^2+y^2} + \frac{-2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\iint_{\mathscr{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dxdy = \mathbf{0}$$

Ce résultat est différent de la circulation calculée à la question **1.** car P et Q ne sont pas continues $(0,0)\in\mathscr{D}$, donc ne sont pas différentiables, et donc n'admettent pas des dérivées partielles continues en $(0,0)\in\mathscr{D}$.