Chapitre 6. Exercice A.1.4

À $t = 0$, le point mobile M_t est situé au pôle sud du cercle de centre $(0, R)$ et de rayon R : une paramétrisation de ce cercle est

$$\Phi_{t=0}(\theta) = \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R + R\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi[.$$

On a alors $M_{t=0} = (0, 0) = \Phi_{t=0}(-\frac{\pi}{2})$.

Le cercle est supposé rouler sur l'axe (Ox) dans le sens croissant des abscisses x.

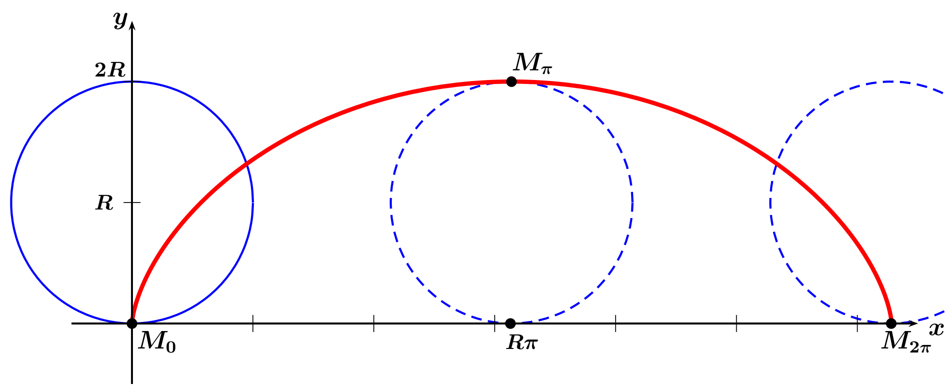
1. Le cercle tourne donc dans le sens inverse du sens trigonométrique. Après avoir tourné d'un angle $-t < 0$, en radian, le cercle s'est déplacé d'une distance Rt. Les coordonnées de son centre sont donc (Rt, R). Une paramétrisation de ce cercle est

$$\Phi_t(\theta) = \begin{pmatrix} Rt + R\cos\theta \\ R + R\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi[.$$

L'angle du point M_t sur ce cercle est $-\frac{\pi}{2} - t$ donc les coordonnées du point mobile M_t sont

$$\Phi_t(-\frac{\pi}{2} - t) = \begin{pmatrix} Rt + R\cos(\frac{\pi}{2} + t) \\ R - R\sin(\frac{\pi}{2} + t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(t - \sin t) \\ R(1 - \cos t) \end{pmatrix},$$

2. Figure de quelques arches de cycloïde



3. La longueur d'une arche est

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \int_0^{2\pi} R\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt = \int_0^{\pi} R\sqrt{2(1 - \cos t)}\, dt$$

On remarque une symétrie d'axe $x = R\pi$:

$$\ell = 2R \int_0^{\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)}\, dt$$

On effectue un changement de variable $t = 2u \Rightarrow dt = 2du$. On utilise la relation $1 - \cos(2u) = 2\sin^2 u$.

$$\ell = 2R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\sin^2 u}\,(2du) = 8R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u\; du = 8R\Big[-\cos u\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 8R.$$

Chapitre 6. Exercice A.2.5

1. À faire !