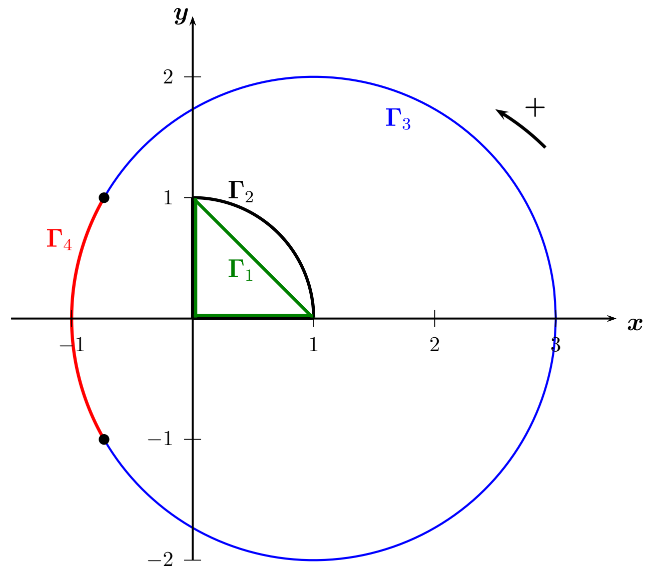
Chapitre 6. Exercice A.2.5

1. Dans cet exercice, toutes les courbes sont orientées dans le sens trigonométrique.



(a) $\vec{V} = \begin{pmatrix} y \\ -x+1 \end{pmatrix}$.

• On a $\Gamma_1 = [OA] \cup [AB] \cup [BO]$.

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in [OA] \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t : 0 \mapsto 1\,,$$

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in [AB] \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix}, \quad t : 1 \mapsto 0\,,$$

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in [BO] \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad t : 1 \mapsto 0.$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} P(x,y)dx + Q(x,y)dy &= \int_{[OA]} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_{[BO]} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \\
&= \int_0^1 0 \times 1dt + 1 \times 0dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-t) \times 1dt + (1-t) \times (-1)dt + \int_1^0 t \times 0dt + 1 \times 1dt \\
&= 0 \quad + \quad 0 \quad + \int_1^0 1dt = \boxed{-1}\,.
\end{aligned}$$

• On a $\Gamma_2 = [OA] \cup \overset{\frown}{AB} \cup [BO]$.

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \overset{\frown}{AB} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad t : 0 \mapsto \frac{\pi}{2}\,,$$

La circulation de $\vec{V}$ le long de Γ_1 est

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_2} P(x,y)dx + Q(x,y)dy &= \int_{[OA]} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_{[BO]} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \\
&= 0 \quad + \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \times (-\sin\theta)d\theta + (1-\cos\theta) \times \cos\theta d\theta \quad -1 \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta - 1)d\theta - 1 = \Big[\sin\theta - \theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - 1 = (1 - \tfrac{\pi}{2}) - 1 = \boxed{-\tfrac{\pi}{2}}\,.
\end{aligned}$$

• Γ_3 :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Gamma_3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2\cos\theta \\ 2\sin\theta \end{pmatrix}, \quad t : 0 \mapsto 2\pi\ ,$$

$$\int_{\Gamma_1} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_0^{2\pi} 2\sin\theta \times (-2\sin\theta)d\theta + (-2\cos\theta)\times(2\cos\theta)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} -4\,d\theta = \boxed{-8\pi}\,.$$

• Γ_4 : on cherche d'abord les angles associés au point de départ et d'extrémités :

$$M(x,y) \in \Gamma_4 \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} x \le 1 \\ y = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1+2\cos\theta \le 1 \\ y = 2\sin\theta = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \quad \theta = \frac{5\pi}{6}$$

$$M(x,y) \in \Gamma_4 \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} x \le 1 \\ y = -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1+2\cos\theta \le 1 \\ y = 2\sin\theta = -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \quad \theta = \frac{7\pi}{6}$$

On obtient la paramétrisation suivante de Γ_4 :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Gamma_4 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2\cos\theta \\ 2\sin\theta \end{pmatrix}, \quad t : \frac{5\pi}{6} \mapsto \frac{7\pi}{6}\ ,$$

$$\int_{\Gamma_4} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} -4\,d\theta = \boxed{-\frac{4\pi}{3}}\,.$$

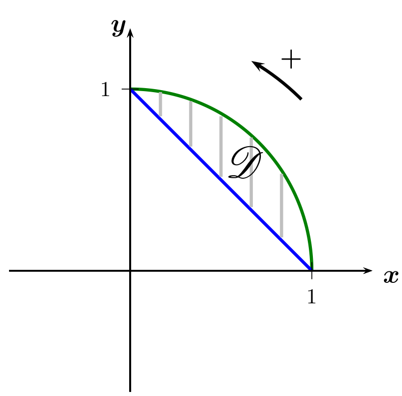
(b) Le champ de vecteur $\vec{U}$ dérive d'un potentiel scalaire : en effet, $\vec{U} = \nabla f$ avec $f(x,y) = xy$.
Les chemins Γ_1, Γ_2 et Γ_3 étant fermés, on a

$$\int_{\Gamma_1} \vec{U}\cdot d\vec{\ell} = 0 = \int_{\Gamma_2} \vec{U}\cdot d\vec{\ell} = \int_{\Gamma_3} \vec{U}\cdot d\vec{\ell}$$

En ce qui concerne Γ_4, on a le résultat

$$\int_{\Gamma_4} \vec{U}\cdot d\vec{\ell} = f\circ\Phi(\frac{7\pi}{6}) - f\circ\Phi(\frac{5\pi}{6}) = \underbrace{(1+2\cos\frac{7\pi}{6})}_{=1-\sqrt{3}}\underbrace{(2\sin\frac{7\pi}{6})}_{=-1} - \underbrace{(1+2\cos\frac{5\pi}{6})}_{=1-\sqrt{3}}\underbrace{(2\sin\frac{5\pi}{6})}_{=1} = \boxed{2(\sqrt{3}-1)}.$$

2. $\mathscr{D} = \{(x,y);\ x^2+y^2 < 1, \quad x+y > 1\}$.



Le chemin vert orienté est paramétrable par

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad t : 0 \mapsto \frac{\pi}{2} \ ,$$

Le chemin bleu orienté est paramétrable par

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix}, \quad t : 0 \mapsto 1 \ .$$

La circulation de $\vec{W}(y^2, -x^2)$ le long du bord orienté Γ de $\mathscr{D}$ est

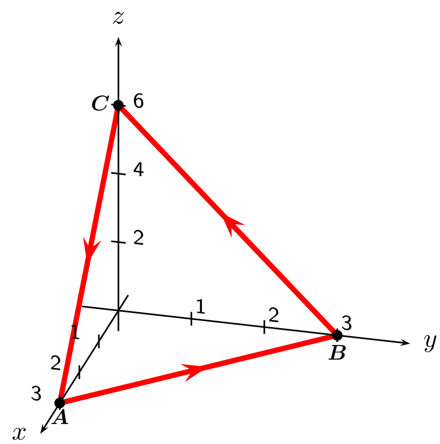
$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \vec{W} \cdot d\vec{\ell} = \int_\Gamma y^2 dx - x^2 dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \times (-\sin\theta) d\theta - \cos^2\theta \times (\cos\theta) d\theta + \int_0^1 (1-t)^2 \times 1 dt - t^2 \times (-1) dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin^3\theta - \cos^3\theta) d\theta + \int_0^1 (1 - 2t + 2t^2) dt \\
&= \Big[\cos\theta - \frac{\cos^2\theta}{3} - \sin\theta + \frac{\sin^3\theta}{3}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \Big[t - t^2 + \frac{2t^3}{3}\Big]_0^1 \\
&= (-1 + \frac{1}{3}) - (1 - \frac{1}{3}) + 1 - 1 + \frac{2}{3} = \boxed{-\frac{2}{3}} .
\end{aligned}$$

La courbe Γ étant parcourue dans le sens trigonométrique et sans point double, n peut retrouver ce résultat avec le théorème de Green-Riemann

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \vec{W} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\mathscr{D}} -2(x+y) dx dy = & -2 \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos\theta + r\sin\theta) r dr \right) d\theta + 2 \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x+y) dy \right) dx \\
= & -2 \int_0^1 r^2 \Big[\sin\theta - \cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} dr + 2 \int_0^1 \Big[xy + \frac{y^2}{2}\Big]_0^{1-x} dx \\
= & -2 \int_0^1 2r^2 + 2 \int_0^1 \left(x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx \\
= & -4 \Big[\frac{r^3}{3}\Big]_0^1 + 2 \Big[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{(1-x)^3}{6}\Big]_0^1 \\
= & -\frac{4}{3} + 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \boxed{-\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

Chapitre 6. Exercice A.2.7 Circulation

1. L'orientation est indiquée sur la courbe.



On paramétrise les trois côtés du triangle $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ de la façon suivante :

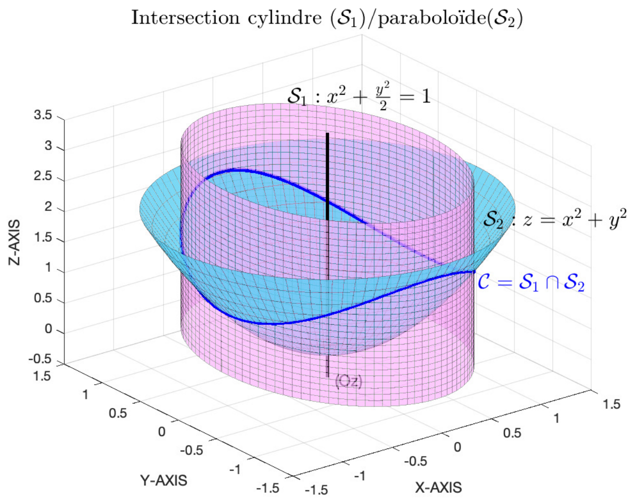
$$\begin{aligned}
M(x,y,z)\in[AB] \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, t\in[0,1]\ ,\quad M = A + t\,\overrightarrow{AB}\ ,\\
&\Leftrightarrow \quad \exists\, t\in[0,1]\ ,\quad M = (1-t)A + tB\ ,\ (\text{car } \overrightarrow{AB} = B - A)\\
&\Leftrightarrow \quad \exists\, t\in[0,1]\ ,\ \left\{\begin{array}{lcl} x &=& (1-t)\times 3 + t\times 0 = 3(1-t)\\ y &=& (1-t)\times 0 + t\times 3 = 3t\\ z &=& (1-t)\times 0 + t\times 0 = 0\ \Rightarrow\ dz = 0\end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M(x,y,z)\in[BC] \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, t\in[0,1]\ ,\quad M = (1-t)\,B + tC\ ,\\
&\Leftrightarrow \quad \exists\, t\in[0,1]\ ,\ \left\{\begin{array}{lcl} x &=& (1-t)\times 0 + t\times 0 = 0 \Rightarrow\ dx = 0\\ y &=& (1-t)\times 3 + t\times 0 = 3(1-t)\\ z &=& (1-t)\times 0 + t\times 6 = 6t\end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M(x,y,z)\in[CA] \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, t\in[0,1]\ ,\quad M = (1-t)\,C + tA\ ,\\
&\Leftrightarrow \quad \exists\, t\in[0,1]\ ,\ \left\{\begin{array}{lcl} x &=& (1-t)\times 0 + t\times 3 = 3t\\ y &=& (1-t)\times 0 + t\times 0 = 0\\ z &=& (1-t)\times 6 + t\times 0 = 6(1-t)\end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\mathscr{C}}(\vec{V}) &= \int_{\overset{\frown}{AB}} \left(xydx + \underbrace{xdz}_{=0}\right) + \int_{\overset{\frown}{BC}} \underbrace{(xydx + xdz)}_{=0} + \int_{\overset{\frown}{CA}} \left(\underbrace{xydx}_{=0} + xdz\right)\\
&= \int_0^1 9t(1-t)\times(-3dt) + \int_0^1 3t\times(-6dt)\\
&= \left[-\frac{27}{2}t^2 + 9t^3 - 9t^2\right]_0^1 = \boxed{-\frac{27}{2}}\ .
\end{aligned}$$

2. L'orientation est choisie dans le sens croissant du paramètre.



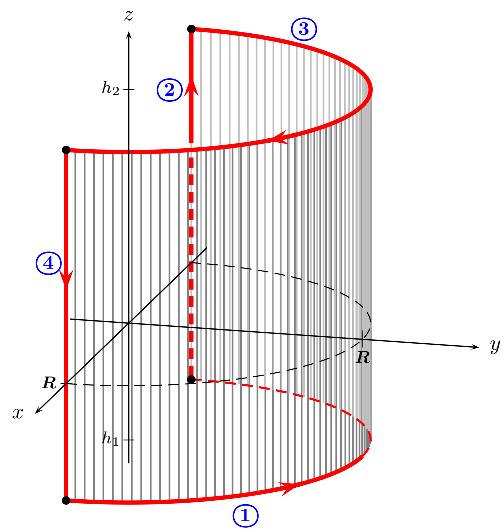
La paramétrisation de cette courbe est obtenue à la question 2 de l'exercice A.2.7 du chapitre 3. Nous avions trouvé

$$\begin{cases} x &= \cos\theta \\ y &= \sqrt{2}\sin\theta \\ z &= \cos^2\theta + 2\sin^2\theta = 1 + \sin^2\theta \end{cases} \qquad \text{avec } \theta \in [0, 2\pi]\ .$$

Avec $V = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mathscr{C}}(\vec{V}) &= \int_0^{2\pi} 1(-\sin\theta)\,d\theta + (\cos\theta)(\sqrt{2}\cos\theta)\,d\theta + 1(2\cos\theta\sin\theta)\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\sin\theta + \sqrt{2}\frac{\cos(2\theta)+1}{2} + 2\cos\theta\sin\theta\right] d\theta \\ &= \left[\cos\theta + \sqrt{2}\frac{\sin(2\theta)}{4} + \sqrt{2}\frac{\theta}{2} + \sin^2\theta\right]_0^{2\pi} \\ &= \sqrt{2}\frac{2\pi}{2} = \sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

3. L'orientation est indiquée sur la courbe.



La courbe $\mathscr{C}$ est la réunion des quatres courbes suivantes : à finir !

Chapitre 6. Exercice A.2.10 Calcul d'aire, Green-Riemann

À faire !