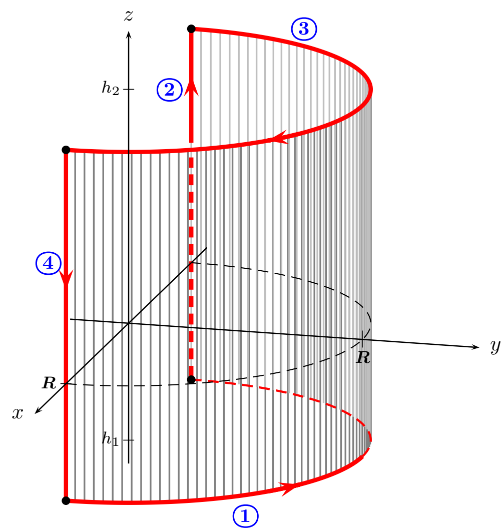
Chapitre 6. Exercice A.2.7 Circulation

3.



La courbe $\mathscr{C}$ est la réunion des quatres courbes suivantes

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \Gamma_1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}R\cos\theta\\R\sin\theta\\h_1\end{pmatrix}, \quad \theta : 0 \mapsto \pi\ ,$$

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \Gamma_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-R\\0\\t\end{pmatrix}, \quad t : h_1 \mapsto h_2\ ,$$

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \Gamma_3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}R\cos\theta\\R\sin\theta\\h_2\end{pmatrix}, \quad \theta : \pi \mapsto 0.$$

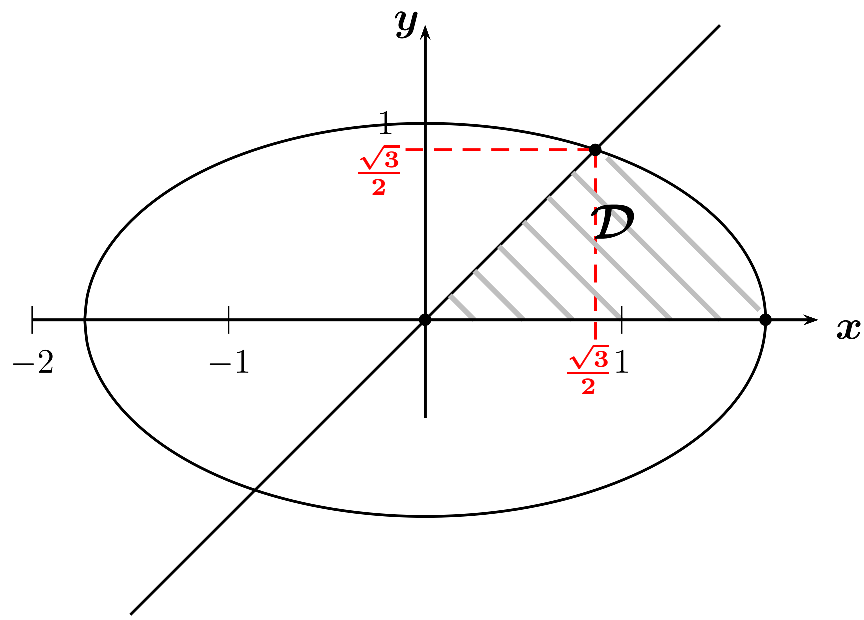
$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \Gamma_4 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}R\\0\\t\end{pmatrix}, \quad t : h_2 \mapsto h_1.$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\mathscr{C}}(\vec{V}) &= -\int_{\Gamma_1} ydx + zdy + xdz - \int_{\Gamma_2} ydx + zdy + xdz - \int_{\Gamma_3} ydx + zdy + xdz - \int_{\Gamma_4} ydx + zdy + xdz \\
&= \int_0^{\pi} \left[R^2\sin^2\theta - h_1 R\cos\theta\right] d\theta + \int_{h_1}^{h_2} Rdt + \int_{\pi}^{0} \left[R^2\sin^2\theta - h_2 R\cos\theta\right] d\theta - \int_{h_2}^{h_1} Rdt \\
&= R(h_2 - h_1)\int_0^{\pi} \cos\theta \ d\theta + 2\int_{h_1}^{h_2} Rdt = \boxed{2R(h_2 - h_1)}\ .
\end{aligned}$$

Chapitre 6. Exercice A.2.10 Calcul d'aire, Green-Riemann

On considère le domaine de $\mathbb{R}^2$ suivant : $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{x^2}{3} + y^2 \leq 1\,,\ 0 \leq y \leq x\right\}$.



Dans cet exercice on vous demande calculer l'aire de $\mathcal{D}$ à l'aide d'une intégrale double puis de retrouver ce résultat à l'aide d'une intégrale curviligne sur le bord de $\mathcal{D}$ en utilisant le théorème de Green-Riemann.

1. Calcul de l'aire de $\mathcal{D}$

Pour calculer cette aire on peut soit utiliser le théorème de Fubini, soit utiliser un changement de variable à l'aide des coordonnées polaires.

<u>Choix 1 : Fubini</u> On réécrit le domaine $\mathcal{D}$ de la façon suivante

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\,,\ y \leq x \leq \sqrt{3}\sqrt{1-y^2}\right\}$$

D'où

$$\begin{aligned} Aire(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}} dxdy = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\int_y^{\sqrt{3}\sqrt{1-y^2}} dx\right) dy = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (\sqrt{3}\sqrt{1-y^2} - y)dy &= \sqrt{3}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-y^2}dy - \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta\, d\theta - \frac{3}{8} \\ &= \sqrt{3}\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{3}{8} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

(On a effectué le changement de variable $y = \sin\theta$)

Choix 2 : Fubini On réécrit le domaine $\mathcal{D}$ de la façon suivante

$$\mathcal{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le \frac{\sqrt{3}}{2}\,,\ 0\le y\le x\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{\sqrt{3}}{2}\le x\le\sqrt{3}\,,\ 0\le y\le\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}\right\}.$$

D'où

$$\begin{aligned}Aire(\mathcal{D})=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\int_0^x dy\right)dx+\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}}\left(\int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}}dy\right)dx &=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}x\,dx+\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}dx\\ &=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\sqrt{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta\\ &=\frac{3}{8}+\sqrt{3}\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi\sqrt{3}}{6}\end{aligned}$$

Choix 3 : Changement de variable On pose $x=\sqrt{3}r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$.

- $\dfrac{x^2}{3}+y^2\le 1\Rightarrow 0\le r\le 1$;
- $0\le y\le x\Rightarrow 0\le\sin\theta\le\sqrt{3}\cos\theta$. Vous résolvez cette inéquation sur le cercle trigonométrique.

On trouve $\theta\in\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{3}\right]$.

- Il faut calculer le jacobien de ce changement de variable : $J(r,\theta)=r\sqrt{3}\ge 0$. Finalement,

$$Aire(\mathcal{D})=\sqrt{3}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\right)\left(\int_0^1 r\,dr\right)=\sqrt{3}\times\frac{\pi}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\pi\sqrt{3}}{6}\ .$$

2. Application de Green-Riemann Le bord Γ de $\mathcal{D}$ est fermé et sans point double. Si on parcourt Γ dans le sens direct (i.e sens inverse des aiguilles d'une montre) on a

$$\iint_{\mathcal{D}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)\,dxdy=\int_\Gamma P(x,y)dx+Q(x,y)dy\ .$$

On rappelle que $Aire(\mathcal{D})=\displaystyle\iint_{\mathcal{D}}1\times\ dxdy$. Pour exprimer l'aire de $\mathcal{D}$ en fonction d'une intégrale curviligne, il suffit de trouver deux fonctions de deux variables P et Q continûment différentiable telles que

$$\forall(x,y)\in\mathcal{D},\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=1\ .$$

Il y a une infinité de choix possibles :

- $P(x,y)=0$ et $Q(x,y)=x$;
- $P(x,y)=-y$ et $Q(x,y)=0$;
- $P(x,y)=-\frac{y}{2}$ et $Q(x,y)=\frac{x}{2}$, etc...

Paramétrons le bord Γ dans le sens direct :

1) $\begin{cases}x=t\\ y=0\end{cases}$, $t:0\to\sqrt{3}$, 2) $\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$, $\theta:0\to\frac{\pi}{3}$, 3) $\begin{cases}x=t\\ y=t\end{cases}$, $t:\frac{\sqrt{3}}{2}\to 0$.

Utilisons le premier choix :

$$Aire(\mathcal{D})=\int_0^{\sqrt{3}}t\times 0\,dt\ +\ \int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{3}\cos^2\theta\,d\theta\ +\ \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^0 t\times 1\,dt=\sqrt{3}\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\left[\frac{t^2}{2}\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^0=\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$$