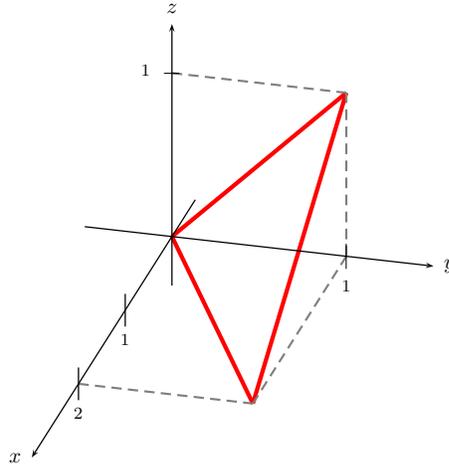


Chapitre 7. Exercice A.2.2 Aire, masse, flux

1. On a $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 2z = 0, x \geq 0, y \leq 1, z \geq 0\}$. Pour représenter cette surface dans \mathbb{R}^3 vous devez déterminer les intersections des plans suivants

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ x = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Ces intersections vous donnent les trois cotés (en rouge) du triangle ci-dessous.



a.

• Choix 1 : utilisation des paramètres x et y .

On exprime z en fonction de x et y et on cherche le domaine de définition de x et y à partir des inéquations de l'énoncé : on a

$$z = y - \frac{x}{2} := \varphi(x, y) \quad \text{et} \quad \boxed{z \geq 0 \Leftrightarrow y - \frac{x}{2} \geq 0}.$$

On obtient

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = y - \frac{x}{2}, (x, y) \in D\} \quad \text{avec} \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \leq 1, y - \frac{x}{2} \geq 0\}.$$

On dit que D est la projection orthogonale de Σ sur le plan (xOy) d'équation $z = 0$.

A partir de la paramétrisation $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y - \frac{x}{2} \end{pmatrix}$, on calcule le jacobien :

$$\vec{t}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{t}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{t}_x \wedge \vec{t}_y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma(x, y) = \|\vec{t}_x \wedge \vec{t}_y\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{3}{2}.$$

L'aire de Σ est donc

$$\mathcal{A}ire(\Sigma) = \iint_{\Sigma} 1 \, d\sigma = \iint_D \sigma(x, y) \, dx \, dy = \frac{3}{2} \iint_D 1 \, dx \, dy = \frac{3}{2} \mathcal{A}ire(D).$$

Ici l'aire de D s'obtient facilement à l'aide de la formule $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1$. Vous pouvez aussi la calculer à l'aide de Fubini :

$$\mathcal{A}ire(D) = \int_0^2 \left(\int_{\frac{x}{2}}^1 dy \right) dx = \int_0^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx = \left[x - \frac{x^2}{4} \right]_0^2 = 2 - \frac{2^2}{4} = 1.$$

Finalement, $\boxed{\mathcal{A}ire(\Sigma) = \frac{3}{2} \times \mathcal{A}ire(D) = \frac{3}{2}}$.

• Choix 2 : utilisation des paramètres x et z .

On exprime y en fonction de x et z et on cherche le domaine de définition de x et z à partir des inéquations de l'énoncé : on a

$$y = z + \frac{x}{2} := \varphi(x, z) \quad \text{et} \quad \boxed{y \leq 1 \Leftrightarrow z + \frac{x}{2} \leq 1}.$$

On obtient

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z + \frac{x}{2}, (x, z) \in D\} \quad \text{avec} \quad D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, z \geq 0, z + \frac{x}{2} \leq 1\}.$$

On dit que D est la projection orthogonale de Σ sur le plan d'équation $y = 1$.

A partir de la paramétrisation $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z + \frac{x}{2} \\ z \end{pmatrix}$, on calcule le jacobien :

$$\vec{t}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{t}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{t}_x \wedge \vec{t}_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma(y, z) = \|\vec{t}_x \wedge \vec{t}_z\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{3}{2}.$$

L'aire de Σ est donc

$$\mathcal{A}ire(\Sigma) = \iint_{\Sigma} 1 \, d\sigma = \iint_D \sigma(x, z) \, dx \, dz = \frac{3}{2} \iint_D 1 \, dx \, dz = \frac{3}{2} \mathcal{A}ire(D).$$

Ici l'aire de D s'obtient facilement à l'aide la formule $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{2 \times 1}{2} = 1$. Vous pouvez aussi la calculer à l'aide du théorème de Fubini :

$$\mathcal{A}ire(D) = \int_0^2 \left(\int_0^{1-\frac{x}{2}} dz \right) dx = \int_0^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx = \left[x - \frac{x^2}{4} \right]_0^2 = 2 - \frac{2^2}{4} = 1.$$

Finalement, $\boxed{\mathcal{A}ire(\Sigma) = \frac{3}{2} \times \mathcal{A}ire(D) = \frac{3}{2}}$.

• Choix 3 : utilisation des paramètres y et z .

On exprime x en fonction de y et z et on cherche le domaine de définition de y et z à partir des inéquations de l'énoncé : on a

$$x = 2y - 2z := \varphi(y, z) \quad \text{et} \quad \boxed{x \geq 0 \Leftrightarrow y - z \geq 0}.$$

On obtient

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y - 2z, (y, z) \in D\} \quad \text{avec} \quad D = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 1, z \geq 0, y - z \geq 0\}.$$

On dit que D est la projection orthogonale de Σ sur le plan (yOz) d'équation $x = 0$.

A partir de la paramétrisation $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y - 2z \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on calcule le jacobien :

$$\vec{t}_y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{t}_z = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{t}_y \wedge \vec{t}_z = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma(y, z) = \|\vec{t}_y \wedge \vec{t}_z\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3.$$

L'aire de Σ est donc

$$\mathcal{A}ire(\Sigma) = \iint_{\Sigma} 1 \, d\sigma = \iint_D \sigma(y, z) \, dydz = 3 \iint_D 1 \, dydz = 3\mathcal{A}ire(D).$$

Ici l'aire de D s'obtient facilement à l'aide la formule $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$. Vous pouvez aussi la calculer à l'aide du théorème de Fubini :

$$\mathcal{A}ire(D) = \int_0^1 \left(\int_0^y dz \right) dy = \int_0^1 y \, dy = \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Finalement, $\boxed{\mathcal{A}ire(\Sigma) = 3 \times \mathcal{A}ire(D) = \frac{3}{2}}$.

b. Étant donné la masse surfacique μ de Σ , la masse totale de Σ est donnée par la formule

$$m = \iint_{\Sigma} \mu \, d\sigma.$$

Pour le choix 3 on obtient

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \mu(\varphi(y, z), y, z) \sigma(y, z) \, dydz = \iint_D ((2y - 2z) + y + z) \times 3 \, dydz \\ &= 3 \iint_D (3y - z) \, dydz \\ &= 3 \int_0^1 \left(\int_0^y (3y - z) \, dz \right) dy \\ &= 3 \int_0^1 \frac{5}{2} y^2 \, dy = 3 \times \frac{5}{2} \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

c. Utilisons le choix 2.

La normale qui fait un angle aigu avec l'axe (Oy) est $\vec{N} = -\vec{t}_x \wedge \vec{t}_z = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On exprime \vec{V} en fonction de x et z : $\vec{V} = \begin{pmatrix} x^2 + 1 \\ (\frac{x}{2} + z)^2 \\ z^2 \end{pmatrix}$. On a donc

$$\mathcal{F}lux_{\Sigma}(\vec{V}) = \iint_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_D \vec{V} \cdot \vec{N} \, dx dz = \int_0^2 \left(\int_0^{1-\frac{x}{2}} \left(-\frac{x^2}{4} + xz - \frac{1}{2} \right) dz \right) dx = -\frac{1}{2}.$$

2. Le volume \mathcal{V} est un tétraèdre dont le bord \mathcal{S} est constitué des 4 faces suivantes :

• Σ : l'orientation de la normale utilisée à la question **1.c)** est bien dirigée vers l'intérieur du volume donc

$$\mathcal{F}lux_{\Sigma}(\vec{V}) = -\frac{1}{2}.$$

• la face arrière $D_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, z - y \leq 0, z \geq 0 \text{ et } y \leq 1\} \subset (yOz)$. Dans ce cas, $d\sigma = dydz$ et un vecteur normal unitaire dirigé vers l'intérieur est $\vec{n} = (1, 0, 0)$. On a $\vec{V} \cdot \vec{n} = 1 + x^2 = 1 + 0$. On trouve

$$\mathcal{F}lux_{D_1}(\vec{V}) = \iint_{D_1} 1 \, dydz = \mathcal{A}ire(D_1) = \frac{1}{2}.$$

• la face de droite $D_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 1, x + 2z \leq 2, z \geq 0 \text{ et } x \geq 0\} \subset (xOz)$. Dans ce cas $d\sigma = dx dz$ et le vecteur normal unitaire dirigé vers l'intérieur est $\vec{n} = (0, -1, 0)$. On a $\vec{V} \cdot \vec{n} = -y^2 = -1$.

On trouve $\mathcal{F}lux_{D_2}(\vec{V}) = \iint_{D_2} -1 \, dx dz = -\mathcal{A}ire(D_2) = -1$.

• la face d'en-dessous $D_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0, x - 2y \leq 0, x \geq 0 \text{ et } y \leq 1\} \subset (xOy)$. Dans ce cas $d\sigma = dx dy$ et le vecteur normal unitaire dirigée vers l'intérieur est $\vec{n} = (0, 0, 1)$. On a $\vec{V} \cdot \vec{n} = z^2 = 0$. On trouve $\mathcal{F}lux_{D_3}(\vec{V}) = 0$.

Finalement

$$\mathcal{F}lux_{\mathcal{S}}(\vec{V}) = \mathcal{F}lux_{\Sigma}(\vec{V}) + \mathcal{F}lux_{D_1}(\vec{V}) + \mathcal{F}lux_{D_2}(\vec{V}) + \mathcal{F}lux_{D_3}(\vec{V}) = -1.$$

Chapitre 7. Exercice A.2.7 Flux

À faire!