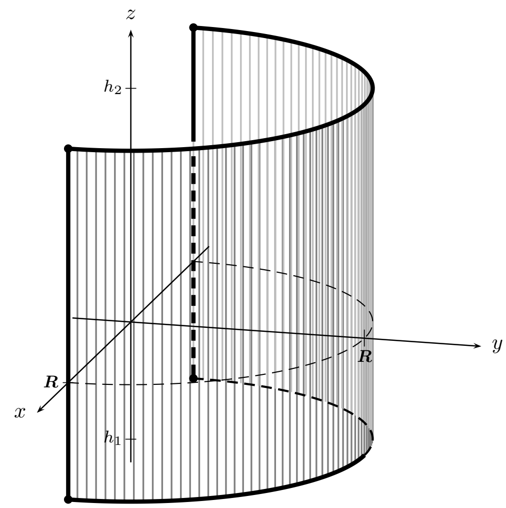
Chapitre 7. Exercice A.2.7 Flux

Il s'agit du demi-cylindre suivant



On considère la surface $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x^2+y^2+R^2, h_1 \le z \le h_2, y \ge 0\}$.

1. On peut paramétrer Σ en coordonnées cylindriques de la façon suivante

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Sigma \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad \text{avec } \varphi \in [0,\pi] \text{ and } z \in [h_1, h_2] \; .$$

2. On calcule le jacobien $||\vec{t}_\varphi \wedge \vec{t}_z||$.

$$\vec{t}_\varphi = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \; \vec{t}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{t}_\varphi \wedge \vec{t}_z = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $||\vec{t}_\varphi \wedge \vec{t}_z|| = R$ et

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\, d\sigma = \iint_{[0,\pi]\times[h_1,h_2]} f(R\cos\varphi, R\sin\varphi, z) \times R\, d\varphi\, dz.$$

3. Non car tout simplement, on ne peut pas exprimer la variable z en fonction des paramètres (x,y). De plus, la projection orthogonale (Δ :=le demi-cercle en pointillés) de Σ sur le plan (xOy) ne définit pas une bijection donc on ne peut pas utiliser les deux variables (x,y) pour contsruire un changement de variable de $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ sur Σ.

4. Avec $\vec{V} = (-y,-z,-x)$ on a $\mathbf{rot}\,\vec{V} = (1,1,1)$. En considérant le vecteur normal $\vec{N} = \vec{t}_\varphi \wedge \vec{t}_z = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, 0)$, le flux de rot $\vec{V}$ à travers Σ est

$$\begin{aligned} \mathrm{Flux}_\Sigma(\mathbf{rot}\,\vec{V}) = \iint_\Sigma \vec{V}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\, d\sigma &= \iint_{[0,\pi]\times[h_1,h_2]} (\cos\varphi + \sin\varphi) \times R d\varphi\, dz \\ &= R(h_2-h_1)\Big[(\sin\varphi - \cos\varphi)\Big]_0^\pi \\ &= R(h_2-h_1) \times \big(-(-1)-(-1)\big) = \boxed{2R(h_2-h_1)}. \end{aligned}$$

Chapitre 8. Exercice A.2.1

Comparaison par le th. de Stokes-Ampère de Chap 7. Ex A.2.7 Q4/Chap 6. Ex A.2.7 Q3

3. Soit $\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3); \; x^2 + y^2 = R^2$ et $h_1 \leq z \leq h_2$ et $y \geq 0\}$. On a calculé la circulation de $\vec{V}(-y, -z, -x)$ le long du bord $\mathscr{C}$ de Σ à l'exercice A.2.7 Q3 du chapitre 6 et on a trouvé

$$\int_{\mathscr{C}} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = 2R(h_2 - h_1).$$

On a aussi calculé le flux de $\mathbf{rot}\, \vec{V}$ à travers Σ à l'exercice A.2.7 du chapitre 7 et on a trouvé

$$\text{Flux}_{\Sigma}(\mathbf{rot}\, \vec{V}) = \iint_{\Sigma} \mathbf{rot}\, \vec{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = 2R(h_2 - h_1).$$

Cela se justifie par le choix du champ des normales unitaires $\vec{\boldsymbol{n}}$ ayant une seconde composante positive (càd dirigé dans le sens positif de l'axe (Oy)) qui est cohérent avec l'orientation de la courbe $\mathscr{C}$ choisie au chapitre 6 selon la règle de la main droite.

Chapitre 8. Exercice A.2.1

Application du th. de Gauss-Ostrogradski Chap 7. Ex A.2.2 Q2/Chap 5. Ex A.2.1

1. À l'exercice A.2.2 du chapitre 7, on a trouvé que le flux de $\vec{V} = (x^2+1, y^2, z^2)$ à travers le bord de $\mathcal{V}$ est égale à

$$Flux_S(\vec{V}) = \iint_S \vec{V} \cdot \boldsymbol{\vec{n}}\, d\sigma = -1$$

sachant que le champ des normales unitaires est dirigé vers l'intérieur du volume.

Or, dans le théorème de Gauss-Ostrogradski, le champ des normales unitaires doit être dirigé vers l'extérieur du volume. Par conséquent on doit trouver
Utiliser les calculs des coordonnées du centre de gravité du chapitre 5 exercice A.2.1 pour retrouver

$$Flux_S(\vec{V}) = -\iint_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\overrightarrow{V}\, dxdydy.$$

On peut utiliser les calculs des coordonnées du centre de gravité pour calculer l'intégrale triple : On

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,\vec{V}(x,y,z) = 2(x+y+z) \Rightarrow \iint_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\overrightarrow{V}\, dxdydy = &\iint_{\mathcal{V}} 2(x+y+z)\, dxdydy \\ =&2\left(\iint_{\mathcal{V}} x\, dxdydy + \iint_{\mathcal{V}} y\, dxdydy + \iint_{\mathcal{V}} z\, dxdydy\right) \\ =&2 \times Vol(\mathcal{V}) \times (x_G + y_G + z_G) = 2 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1.\end{aligned}$$

Comparaison par le th. de Stokes-Ampère de Chap 7. Ex A.2.4 Q2/Chap 6. Ex A.2.7 Q2

Chap 7. Ex A.2.4 Q2. On considère la surface $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ z = x^2 + y^2 \text{ et } x^2 + \frac{y^2}{2} \leq 1\}$.
On utilise une paramétrisation en coordonnées cylindriques

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Sigma \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \sqrt{2}\rho\sin\varphi \\ z = \rho^2(\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi) = \rho^2(1+\sin^2\varphi) \end{array} \right. \qquad \text{avec } \varphi \in [0, 2\pi[\text{ et } \rho \in [0,1].$$

On calcule le champ des normales $\vec{N} = \vec{T}_r \wedge \vec{T}_\varphi$ réalisant un angla aigu avec l'axe (Oz) :

$$\vec{T}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sqrt{2}\sin\varphi \\ 2\rho(1+\sin^2\varphi) \end{pmatrix}, \quad \vec{T}_\varphi = \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \sqrt{2}\rho\cos\varphi \\ 2\rho^2\sin\varphi\cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{N} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2}\rho^2\cos\varphi \\ -4\rho^2\sin\varphi \\ \rho\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

On a

$$\vec{U}\cdot\vec{N} = \rho\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Flux}_\Sigma(\vec{V}) = \iint_{[0,2\pi[\times[0,1]} \vec{U}\cdot\vec{N}d\rho\, d\varphi = 2\pi\Big[\frac{\rho^2\sqrt{2}}{2}\Big]_0^1 = \boxed{\pi\sqrt{2}}.$$

Chap 6. Ex A.2.7 Q2. Le bord de Σ est la courbe $\mathscr{C}$ étudiée à la question 2 du A.2.7 du chapitre 6. On avait trouvé

$$\int_{\mathscr{C}} \vec{V}\cdot\vec{d\ell} = \pi\sqrt{2}.$$

D'après la règle de la main droite, l'orientation du champ des normales uniraires"vers le haut" est cohérente avec l'orientation de la courbe $\mathscr{C}$ dans le sens croissant du paramètre. D'où l'égalité des résultats d'après le théorème de Stokes-Ampère.

Application du the. de Gauss-Ostrogradski au Chap 7. Ex A.2.4 Q3

À faire !

Chapitre 8. Exercice A.2.1 - question 5

5. On considère $\Sigma := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ 1+\sqrt{x^2+y^2} = z \text{ et } z \geq 3, x \geq 0\}$ Il s'agit d'un demi-cône de sommet $(0,0,1)$

$$1+\sqrt{x^2+y^2} = z \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2 = (z-1)^2 \text{ et } z \geq 1$$

Le bord de σ est composé de trois morceaux paramétrables comme suit :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Gamma_1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 1-t \end{cases} \quad \text{avec } t : 0 \to -2$$

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Gamma_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{avec } \theta : -\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2}$$

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Gamma_3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 1+t \end{cases} \quad \text{avec } t : 2 \to 0$$

La circulation de $\vec{V}((z-1)^2, x, y)$ le long du bord $\mathscr{C}$ de Σ est

$$\begin{aligned}\mathscr{T}_{\mathscr{C}}(\vec{V}) = \int_{\mathscr{C}} \vec{V}\cdot d\vec{\ell} &= \int_0^{-2} t \times (-dt) + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \times (-2\sin\theta d\theta) + (2\cos\theta)^2 d\theta + \int_2^0 t\,dt \\ &= \Big[-\frac{t^2}{2}\Big]_0^{-2} + \Big[8\cos\theta + 2\theta + \sin 2\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \Big[\frac{t^2}{2}\Big]_2^0 = \boxed{2\pi - 4}.\end{aligned}$$

On peut retrouver ce résultat avec le théorème de Stokes-Ampère en calculant le flux de $\mathbf{rot}\,\vec{V}$ à travers Σ orientée par les normales intérieures d'après la règle de la main droite.
Une paramétrisation de Σ est

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Sigma \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = (z-1)\cos\theta \\ y = (z-1)\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad \text{avec } z \in [1,3],\ \theta \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}].$$

Dans ce système de coordonnées on a

$$\mathbf{rot}\,\vec{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2(z-1) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs normaux sont donnés par la formule $\vec{N} = \pm\vec{T}_\theta \wedge \vec{T}_z =$ où

$$\vec{T}_\theta = \begin{pmatrix} -(z-1)\sin\theta \\ (z-1)\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{T}_z = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{N} = \pm\begin{pmatrix} (z-1)\cos\theta \\ (z-1)\sin\theta \\ -(z-1) \end{pmatrix}$$

Les normales intérieures ont une troisième composante positive. L'intégrand est donc

$$\mathbf{rot}\,\vec{V}\cdot(-\vec{T}_\theta \wedge \vec{T}_z) = -\Big((z-1)\cos\theta + 2(z-1)^2\sin\theta - (z-1)\Big)$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Flux}_{\Sigma}(\mathbf{rot}\,\vec{V}) &= -\iint_{[1,3]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\Big((z-1)\cos\theta + 2(z-1)^2\sin\theta - (z-1)\Big)dzd\theta \\
&= \int_1^3 (z-1)dz \times \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta + \int_1^3 2(z-1)^2 dz \times \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta - \int_1^3 (z-1)dz \times \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 d\theta \\
&= -\Big[\frac{(z-1)^2}{2}\Big]_1^3 \times \Big[\sin\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \Big[\frac{2(z-1)^2}{3}\Big]_1^3 \times \Big[-\cos\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \pi\Big[\frac{(z-1)^2}{2}\Big]_1^3 \\
&= \boxed{2\pi - 4}
\end{aligned}
$$

Chapitre 7. Exercice A.2.1 Question 4

Il s'agit plus précisément de la surface définie par

$$S : \quad x^2 + y^2 = z^2 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 - 2x \leq 0$$

Il faut calculer l'aire de S.

1. On commence par paramétrer la surface S. Il s'agit d'un cône lui même composé de deux demi-cônes symétriques l'un de l'autre par rapport au plan d'équation $z = 0$. Plus précisément $S = S_1 \cup S_2$ où

$$S_1 : \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ avec } (x-1)^2 + y^2 \leq 1$$

$$S_2 : \quad z = -\sqrt{x^2 + y^2}, \text{ avec } (x-1)^2 + y^2 \leq 1$$

Des paramétrisations de S_1 et S_2 peuvent être

$$M \in S_1 \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi_1(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix} \qquad \text{avec } (x, y) \in D,$$

$$M \in S_2 \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi_2(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -\sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix} \qquad \text{avec } (x, y) \in D,$$

où $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$ est le disque de centre $(1, 0)$ et de rayon 1.

2. On a alors

$$\begin{aligned} \iint_S f(x,y,z) d\sigma &= \iint_{S_1} f(x,y,z)\, d\sigma + \iint_{S_2} f(x,y,z)\, d\sigma \\ &= \iint_D f \circ \Phi_1(x,y) ||\vec{t_x} \wedge \vec{t_y}||\, dxdy + \iint_D f \circ \Phi_2(x,y) ||\vec{t_x} \wedge \vec{t_y}||\, dxdy \end{aligned}$$

On calcule les deux jacobiens pour chaque morceau :

$$\text{Pour } S_1 : \quad \vec{t_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \vec{t_x} \wedge \vec{t_y} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow ||\vec{t_x} \wedge \vec{t_y}|| = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} + 1} = \sqrt{2}$$

$$\text{Pour } S_2 : \quad \vec{t_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \vec{t_x} \wedge \vec{t_y} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow ||\vec{t_x} \wedge \vec{t_y}|| = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} + 1} = \sqrt{2}$$

Les résultats sont identiques pour cause de symétrie.

3. Pour le calcul d'aire, on prend $f(x, y, z) = 1$.

$$\mathcal{A}ire(S) = \iint_S 1\, d\sigma = \iint_D \sqrt{2}\, dxdy + \iint_D \sqrt{2}\, dxdy = 2\sqrt{2} \iint_D 1\, dxdy = 2\sqrt{2} \times \mathcal{A}ire(D) = 2\pi\sqrt{2}.$$