Chapitre 8. Exercice A.2.1

1. Utiliser les calculs des coordonnées du centre de gravité du chapitre 5 exercice A.2.1 pour retrouver

$$\iint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}\vec{V}\, dxdydy = 1.$$

Puis commenter l'orientation du champ des normales.

2. On a déjà montré que le flux de $\vec{V} = (x, y, 0)$ à travers la sphère Σ de rayon R est égal à $\text{Flux}_\Sigma(\vec{V}) = \frac{8\pi R^3}{3}$ à l'exercice A.2.4 Q1 du chapitre 7. Puisque la surface Σ est fermée et orientée par le champ des normales extérieures, on peut retrouver ce résultat grâce au théorème de Gauss-Ostrogradski

$$\text{Flux}_\Sigma(\vec{V}) = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}\vec{V}(x, y, z)\, dxdydz,$$

où $\mathcal{V}$ est la volume fini, délimité par Σ. Ici $\operatorname{div}\vec{V}(x, y, z) = 2$ donc

$$\text{Flux}_\Sigma(\vec{V}) = 2\iiint_{\mathcal{V}} 1\, dxdydz = 2 \times Vol(\mathcal{V}) = 2 \times \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{8\pi R^3}{3}.$$

3. Soit $\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3);\ x^2 + y^2 = R^2 \text{ et } h_1 \leq z \leq h_2 \text{ et } y \geq 0\}$. On a calculé la circulation de $\vec{V}(-y, -z, -x)$ le long du bord $\mathscr{C}$ de Σ à l'exercice A.2.7 Q3 du chapitre 6 et on a trouvé

$$\mathscr{T}_{\mathscr{C}}(\vec{V}) = \int_{\mathscr{C}} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = 2R(h_2 - h_1).$$

On a aussi calculé le flux de $\mathbf{rot}\,\vec{V}$ à travers Σ à l'exercice A.2.7 du chapitre 7 et on a trouvé

$$\text{Flux}_\Sigma(\mathbf{rot}\,\vec{V}) = \iint_\Sigma \mathbf{rot}\,\vec{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = 2R(h_2 - h_1).$$

Il reste à justifier la cohérence des résultats par la règle de la main droite.

4. • <u>Flux de **rot** $\vec{V}$ à travers Σ.</u>
On commence par paramétrer Σ avec les variables x et y :

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$$

Il reste à trouver le domaine de définition des paramètres (x, y).

$$x^2 + y^2 = z \text{ et } z \leq 3 - 2y \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 \leq 3 - 2y \quad \Rightarrow \quad x^2 + (y-1)^2 \leq 4$$

Il s'agit du disque de centre $(0, -1)$ de rayon 2 qu'on notera D.
On calcule un vecteur normal

$$N = \vec{T}_x \wedge \vec{T}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}$$

En faisant un schéma, on remarque que ce vecteur normal est dirigé vers l'intérieur du paraboloïde.

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{rot}\,\vec{V}) = \iint_\Sigma \mathbf{rot}\,\vec{V}\cdot\vec{n}d\sigma = \iint_D \mathbf{rot}\,\vec{V}\cdot\vec{N}\,dxdy$$

Pour calculer cette intégrale double, on effectue un changement de variable en coordonnées polaires

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = -1 + r\sin\theta \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad r\in[0,2], \quad \theta\in[0,2\pi] \quad \text{et} \quad |J| = r$$

On calcule $\mathbf{rot}\,\vec{V}\cdot\vec{N}$ en fonction de r et θ :

$$\mathbf{rot}\,\vec{V}\cdot\vec{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} = x^2 = r^2\cos^2\theta$$

$$\begin{aligned}\Phi_\Sigma(\mathbf{rot}\,\vec{V}) = \int_0^2\left(\int_0^{2\pi} r(r^2\cos^2\theta)\,d\theta\right)dr = \int_0^2\left(\int_0^{2\pi} r^3\,\tfrac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta\right)dr &= \int_0^2 r^3\left[\tfrac{\theta}{2}+\tfrac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi}dr \\ &= \int_0^2 r^3\times\pi\,dr = \pi\left[\tfrac{r^4}{4}\right]_0^2 = \boxed{4\pi}.\end{aligned}$$

•<u>Circulation de $\overrightarrow{V}$ sur le bord $\mathscr{C}$ de Σ.</u>
On sait que le bord est l'intersection du paraboloïde $z = x^2+y^2$ avec le plan $z+2y = 3$. On peut réécrire cette intersection comme une intersection cylindre/plan plus simple à paramétrer :

$$\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ z+2y = 3 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x^2+(y-1)^2 = 4 \\ z = 3-2y \end{cases}$$

Une paramétrisation de cette courbe est donc

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = -1+2\sin\theta \\ z = 3-(-1+2\sin\theta) = 4-2\sin\theta \end{cases}$$

D'après la règle de la main droite, la normale intérieure est associée à une circulation dans le sens trigonométrique pour les variables (x,y) donc $\theta : 0\to 2\pi$.

$$\mathcal{T}_{\mathscr{C}}(\vec{V}) = \int_{\mathscr{C}} dx + \frac{x^3}{3}dy + dz = \int_0^{2\pi}\left(-2\sin\theta + \frac{(2\cos\theta)^3}{3}\times(2\cos\theta) - 2\cos\theta\right)d\theta$$

On peut utiliser la linéarisation de $\cos^4\theta$:

$$\cos^4\theta = \frac{3}{8}+\frac{\cos 2\theta}{2}+\frac{\cos 4\theta}{8}.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\mathscr{C}}(\vec{V}) &= \int_0^{2\pi}\left(-2\sin\theta + \left(2+\frac{8}{3}\cos(2\theta)+\frac{2}{3}\cos(4\theta)\right) - 2\cos\theta\right)d\theta \\ &= \left[2\cos\theta + \left(2\theta+\frac{8}{6}\sin(2\theta)+\frac{2}{12}\sin(4\theta)\right) - 2\sin\theta\right]_0^{2\pi} = \boxed{4\pi}.\end{aligned}$$

5. On considère $\Sigma := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ 1+\sqrt{x^2+y^2} = z \text{ et } z\geq 3, x\geq 0\}$ Il s'agit d'un demi-cône de sommet $(0,0,1)$

$$1+\sqrt{x^2+y^2} = z \quad\Leftrightarrow\quad x^2+y^2 = (z-1)^2 \text{ et } z\geq 1$$

Le bord de σ est composé de trois morceaux paramétrables comme suit :

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\Gamma_1 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x=0\\y=t\\z=1-t\end{cases} \quad \text{avec } t:0\to-2$$

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\Gamma_2 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x=2\cos\theta\\y=2\sin\theta\\z=3\end{cases} \quad \text{avec } \theta:-\frac{\pi}{2}\to\frac{\pi}{2}$$

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\Gamma_3 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x=0\\y=t\\z=1+t\end{cases} \quad \text{avec } t:2\to0$$

La circulation de $\vec{V}((z-1)^2,x,y)$ le long du bord $\mathscr{C}$ de Σ est

$$\begin{aligned}\mathscr{T}_{\mathscr{C}}(\vec{V}) = \int_{\mathscr{C}}\vec{V}\cdot d\vec{\ell} &= \int_0^{-2} t\times(-dt) + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\times(-2\sin\theta d\theta) + (2\cos\theta)^2 d\theta + \int_2^0 t\,dt\\ &= \Big[-\frac{t^2}{2}\Big]_0^{-2} + \Big[8\cos\theta + 2\theta + \sin 2\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \Big[\frac{t^2}{2}\Big]_2^0 = \boxed{2\pi-4}.\end{aligned}$$

On peut retrouver ce résultat avec le théorème de Stokes-Ampère en calculant le flux de $\mathbf{rot}\,\vec{V}$ à travers Σ orientée par les normales intérieures d'après la règle de la main droite.
Une paramétrisation de Σ est

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\Sigma \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x=(z-1)\cos\theta\\y=(z-1)\sin\theta\\z=z\end{cases} \quad \text{avec } z\in[1,3],\ \theta\in[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}].$$

Dans ce système de coordonnées on a

$$\mathbf{rot}\,\vec{V} = \begin{pmatrix}1\\2(z-1)\\1\end{pmatrix}$$

Les vecteurs normaux sont donnés par la formule $\vec{N}=\pm\vec{T}_\theta\wedge\vec{T}_z =$ où

$$\vec{T}_\theta = \begin{pmatrix}-(z-1)\sin\theta\\(z-1)\cos\theta\\0\end{pmatrix},\quad \vec{T}_z = \begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\\1\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \vec{N}=\pm\begin{pmatrix}(z-1)\cos\theta\\(z-1)\sin\theta\\-(z-1)\end{pmatrix}$$

Les normales intérieures ont une troisième composante positive. L'intégrand est donc

$$\mathbf{rot}\,\vec{V}\cdot(-\vec{T}_\theta\wedge\vec{T}_z) = -\Big((z-1)\cos\theta + 2(z-1)^2\sin\theta - (z-1)\Big)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Flux}_\Sigma(\mathbf{rot}\,\vec{V}) &= -\iint_{[1,3]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\Big((z-1)\cos\theta + 2(z-1)^2\sin\theta - (z-1)\Big)dzd\theta\\ &= \int_1^3 (z-1)dz\times\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta + \int_1^3 2(z-1)^2dz\times\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta - \int_1^3(z-1)dz\times\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1d\theta\\ &= -\Big[\frac{(z-1)^2}{2}\Big]_1^3\times\Big[\sin\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \Big[\frac{2(z-1)^2}{3}\Big]_1^3\times\Big[-\cos\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \pi\Big[\frac{(z-1)^2}{2}\Big]_1^3\\ &= \boxed{2\pi-4}\end{aligned}$$

6. On considère le volume $\mathcal{V} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$.
Le champ de vecteur $\vec{V}(z,x,y)$ vérifie $\operatorname{div} \vec{V} = 0$ donc

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{V}(x,y,z)\, dxdydz = 0.$$

On va retrouver ce résultat à l'aide du théorème de Gauss-Ostrogradski en calculant le flux de $\vec{V}$ à travers le bord S de $\mathcal{V}$.

La surface S est composée de deux morceaux

$$\Sigma_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x^2 + y^2 = z - 1, (x,y) \in D\} \quad \text{où } D \text{ est le disque unité}$$

et

$$\Sigma_2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; \ (x,y) \in D \text{ et } z = 0\}.$$

Le flux total de $\vec{V}$ à travers S est $\operatorname{Flux}_S(\vec{V}) = \operatorname{Flux}_{\Sigma_1}(\vec{V}) + \operatorname{Flux}_{\Sigma_2}(\vec{V})$.

• <u>Flux de $\overrightarrow{V}$ à travers Σ_1.</u>
On utilise une paramétrisation en coordonnées cylindrique :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Sigma_1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = 1 - \rho^2 \end{cases} \quad \text{avec } \rho \in [0,1], \ \varphi \in [0, 2\pi[$$

Le champ des normales est dirigés vers l'extérieur si la troisième composante est positive. Ainsi

$$\vec{T}_\rho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -2\rho \end{pmatrix}, \ \vec{T}_\varphi = \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad N = \vec{T}_\rho \wedge \vec{T}_\varphi = \begin{pmatrix} 2\rho^2\cos\varphi \\ 2\rho^2\sin\varphi \\ \rho \end{pmatrix}$$

L'intégrand est

$$\vec{V} \cdot \vec{N} = \begin{pmatrix} 1-\rho^2 \\ \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \end{pmatrix} \wedge \vec{N} = 2\rho(1-\rho^2)\cos\varphi + 2\rho^2\cos\varphi\sin\varphi + \rho^2\sin\varphi$$

Le flux de $\vec{V}$ à travers Σ_1 est donc

$$\begin{aligned}
\operatorname{Flux}_{\Sigma_1}(\vec{V}) &= \iint_{\Sigma_1} \vec{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi[} \Big(2\rho(1-\rho^2)\cos\varphi + 2\rho^2\cos\varphi\sin\varphi + \rho^2\sin\varphi\Big) d\rho d\varphi \\
&= \int_0^1 2\rho(1-\rho^2)d\rho \times \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi + \int_0^1 \rho^2 d\rho \times \int_0^{2\pi} \sin 2\varphi\, d\varphi + \int_0^1 \rho^2\, d\rho \times \int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi \\
&= 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0
\end{aligned}$$

• <u>Flux de $\overrightarrow{V}$ à travers Σ_2.</u>
Ici on utilise le chapitre 4 et calculons exactement

$$\operatorname{Flux}_{\Sigma_2}(\vec{V}) = \iint_D \vec{V} \cdot \boldsymbol{n} d\sigma \ ,$$

où $\boldsymbol{n} = (0,0,-1)$ est le champ des normals unitaires à Σ_2 dirigées vers l'extérieur du volume. On a

$$\vec{V}\cdot\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix}0\\x\\y\end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{n} = -y$$

.

$$\text{Flux}_{\Sigma_2}(\vec{V}) = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi[} -\rho^2\sin\varphi\; d\rho d\varphi = 0.$$

• <u>Flux total.</u> Le flux total est nul.

7. Pour $a>0$, on considère le volume $\mathcal{V} := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\;;\; 0\le z\le\sqrt{a^2-x^2-y^2}\}$.
Il s'agit d'une demi-sphère de rayon a fermée puisque

$$0\le z\le\sqrt{a^2-x^2-y^2} \quad\Leftrightarrow\quad z\ge 0 \text{ et } z^2+x^2+y^2\le a^2.$$

Pour calculer une intégrale triple, on utilise une paramétrisation en coordonnées sphériques :

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{V} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta\\ y = r\sin\varphi\sin\theta\\ z = r\cos\theta\end{cases} \qquad \text{avec } r\in[0,a], \varphi\in[0,2\pi[\text{ et } \theta\in[0,\tfrac{\pi}{2}].$$

Le jacobien du changement de variable est $|J| = r^2\sin\theta$.
Dans ce système de coordonnées, on a pour $\vec{V}(xz^2,-z^2,y^2z)$

$$\text{div}\,\vec{V}(x,y,z) = z^2+y^2 = r^2(cos^2\varphi\sin^2\theta+\cos^2\theta)$$

On obtient alors

$$\iiint_{\mathcal{V}} \text{div}\,\vec{V}(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{[0,a]\times[0,2\pi[\times[0,\frac{\pi}{2}[} r^4(\cos^2\varphi\sin^3\theta+\cos^2\theta\sin\theta)drd\theta d\varphi$$
$$= \frac{a^5}{5}\times\left(\Big[\frac{\varphi}{2}+\frac{\sin 2\varphi}{4}\Big]_0^{2\pi}\times\Big[-\cos\theta+\frac{\cos^3\theta}{3}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\pi\Big[\frac{\cos^3\theta}{3}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \boxed{\frac{4\pi a^5}{15}}.$$

On peut retrouver ce résultat à l'aide du théorème de Gauss-Ostrogradski :
Le bord S de $\mathcal{V}$ est constitué de deux morceaux de surfaces

$$\Sigma_1 := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\;;\; x^2+y^2+z^2=a^2, z\ge 0\}$$

et

$$\Sigma_2 := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\; (x,y)\in D \text{ et } z=0\} \quad \text{où } D \text{ est le disque du plan } (xOy) \text{ de rayon } a.$$

Le flux total de $\vec{V}$ à travers S est $\text{Flux}_S(\vec{V}) = \text{Flux}_{\Sigma_1}(\vec{V}) + \text{Flux}_{\Sigma_2}(\vec{V})$.

• <u>Flux de $\vec{V}$ à travers Σ_1.</u>
Le champ des normales extérieures au volume est dirigé vers le haut : On a donc

$$\vec{N} = \begin{pmatrix}a^2\cos\varphi\sin^2\theta\\ a^2\sin\varphi\sin^2\theta\\ a^2\cos\theta\sin\theta\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \vec{V}\cdot\vec{N} = a^5\sin^3\theta\cos^2\theta - a^4\sin\varphi\sin^2\theta\cos^2\theta$$

Le flux de $\vec{V}$ à travers Σ_1 est donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Flux}_{\Sigma_1}(\vec{V}) &= \iint_{[0,2\pi[\times[0,\frac{\pi}{2}]} \vec{V}\cdot\vec{N}\; d\varphi d\theta \\
&= a^5 \times 2\pi \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cos^2\theta d\theta - a^4 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi}_{=0} \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta d\theta \\
&= a^5 \times 2\pi \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta(1-\cos^2\theta)\cos^2\theta d\theta \quad + \quad 0 \\
&= a^5 \times 2\pi \times \Big[-\frac{\cos^3\theta}{3} + \frac{\cos^5\theta}{5}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = a^5 \times 2\pi \times \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) = \boxed{\frac{4\pi a^5}{15}}.
\end{aligned}$$

• <u>Flux de $\overrightarrow{V}$ à travers Σ_2.</u>
Puisque la surface Σ_2 est incluse dans le plan d'équation $z=0$, le champ de vecteur $\vec{V}$ est nul. Par conséquent, le flux de $\vec{V}$ à travers Σ_2 est nul.

• <u>Flux total.</u> Le flux total est $\mathrm{Flux}_S(\vec{V}) = \mathrm{Flux}_{\Sigma_1}(\vec{V}) = \frac{4\pi a^5}{15}$.

Chapitre 7. Exercice A.2.4 Flux

1. On utilise une paramétrisation en coordonnées sphériques de Σ

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \Sigma \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = R\cos\varphi\sin\theta \\ y = R\sin\varphi\sin\theta \\ z = R\cos\theta \end{cases} \qquad \text{avec } \varphi \in [0, 2\pi[\text{ et } \theta \in [0, \pi].$$

Le vecteur normal dirigé vers l'extérieur est $\vec{N} = \vec{T_\theta} \wedge \vec{T_\varphi} = \begin{pmatrix} R^2\sin^2\theta\cos\varphi \\ R^2\sin^2\theta\sin\varphi \\ R^2\cos\theta\sin\theta \end{pmatrix}$.

Dans ce système de coordonnées, le champ de vecteur $\vec{V}(x, y, 0)$ s'écrit $\vec{V} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\sin\theta \\ R\sin\varphi\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$. Le flux de $\vec{V}$ à travers Σ est donc

$$\begin{aligned}\text{Flux}_\Sigma(\vec{V}) = \iint_{[0,2\pi[\times[0,\pi]} \vec{V}\cdot\vec{N} d\varphi d\theta = \iint_{[0,2\pi[\times[0,\pi]} R^3\sin^3\theta \; d\varphi d\theta &= R^3 \times 2\pi \int_{0^\pi} \sin\theta(1-\cos^2\theta) d\theta \\ &= 2\pi R^3 \Big[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3} \Big]_0^\pi \\ &= \boxed{\frac{8\pi R^3}{3}}.\end{aligned}$$

2. On considère la surface $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; z = x^2 + y^2 \text{ et } x^2 + \frac{y^2}{2} \leq 1\}$.
On utilise une paramétrisation en coordonnées cylindriques

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \Sigma \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \sqrt{2}\rho\sin\varphi \\ z = \rho^2(\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi) = \rho^2(1+\sin^2\varphi) \end{cases} \qquad \text{avec } \varphi \in [0, 2\pi[\text{ et } \rho \in [0, 1].$$

On calcule le champ des normales $\vec{N} = \vec{T_r} \wedge \vec{T_\varphi}$ réalisant un angla aigu avec l'axe (Oz) :

$$\vec{T_r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sqrt{2}\sin\varphi \\ 2\rho(1+\sin^2\varphi) \end{pmatrix}, \quad \vec{T_\varphi} = \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \sqrt{2}\rho\cos\varphi \\ 2\rho^2\sin\varphi\cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{N} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2}\rho^2\cos\varphi \\ -4\rho^2\sin\varphi \\ \rho\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

On a

$$\vec{U}\cdot\vec{N} = \rho\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \text{Flux}_\Sigma(\vec{V}) = \iint_{[0,2\pi[\times[0,1]} \vec{U}\cdot\vec{N} d\rho\, d\varphi = 2\pi\Big[\frac{\rho^2\sqrt{2}}{2}\Big]_0^1 = \boxed{\pi\sqrt{2}}.$$

On a

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ \rho^2(1+\sin^2\varphi) \end{pmatrix} \cdot \vec{N} = -8\rho^3\cos\varphi\sin\varphi + \sqrt{2}\rho^3(1+\sin^2\varphi)$$

Le flux de $\vec{V}$ à travers Σ est

$$\begin{aligned}\text{Flux}_\Sigma(\vec{V}) = \iint_{[0,2\pi[\times[0,1]} \Big(-8\rho^3\cos\varphi\sin\varphi + \sqrt{2}\rho^3(1+\sin^2\varphi)\Big) d\rho\, d\varphi &= \Big[\frac{\rho^4}{4}\Big]_0^1 \times \Big[4\cos^2\varphi + \sqrt{2}\left(\frac{3}{2}\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Big]_0^{2\pi} \\ &= \boxed{\frac{3\pi\sqrt{2}}{4}}.\end{aligned}$$