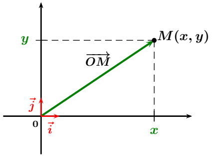
Chapitre I - Fonctions de plusieurs variables

I - Fonctions de deux variables $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$

$\boxed{A}$ Quelques notations.

1. **Coordonnées cartésiennes**. Le couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est assimilé au point M de coordonnées (x, y) dans le plan (xOy) et au vecteur $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base canonique $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



On note OM la distance entre le point M et l'origine O.

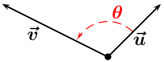
- $OM = ||\overrightarrow{OM}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $||\overrightarrow{OM}||^2 = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM} = x^2 + y^2$.

On écrira indifféremment $f(x, y)$ ou $f(M)$ ou $f(\overrightarrow{OM})$ pour désigner la même quantité.

Rappels de géométrie. (i) Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points du plan (xOy). Alors on a

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$ (appelée norme euclidienne de $\overrightarrow{AB}$).

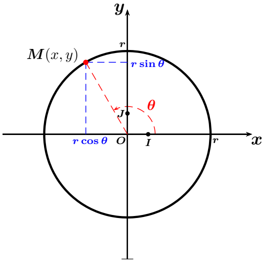
(ii) Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de la base canonique $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Alors le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est défini par



$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}|| \cos\theta.$$

I - Fonctions de deux variables $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$

❷ **Coordonnées polaires**. On peut utiliser la trigonométrie pour définir un autre système de coordonnées.



Pour tout point $M(x,y)$ du plan (xOy) on définit deux nouvelles coordonnées :

- $r = OM = ||\overrightarrow{OM}|| = \sqrt{x^2+y^2}$ et
- $\theta = \begin{cases} \widehat{IOM} & \text{si } M \neq O \\ 0 & \text{si } M = O. \end{cases}$

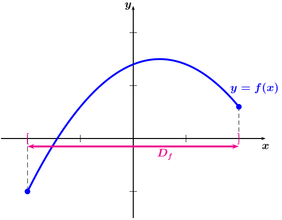
Dans ce cas, on a $\boxed{\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}}$ et le couple (r,θ) est appelé ***coordonnées polaires*** de $M(x,y)$.

→ retravailler le formulaire MT03

I - Fonctions de deux variables $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$

$\boxed{B}$ Graphe, équation explicite et représentation graphique.

Rappels pour les fonctions d'une variable. La manière la plus classique de représenter une application $f : D_f \to \mathbb{R}$ est de représenter son ***graphe*** $\{(x, f(x));\ x \in D_f\}$ où D_f est le domaine de définition de f.



- Le graphe de f se représente graphiquement dans le plan cartésien (xOy).
- Sa forme géométrique est une **courbe** d'*équation explicite* $y = f(x)$.
- La projection orthogonale du graphe sur la droite réelle (Ox) est D_f.

Cas des fonctions de deux variables. Soit $D_f \neq \varnothing$ une partie de $\mathbb{R}^2$ et $f : D_f \to \mathbb{R}$ une application. Le **graphe de** f est l'ensemble $\{(x, y, f(x,y)) \in \mathbb{R}^3;\ (x,y) \in D_f\}$ où D_f est le domaine de définition de f.

- Le graphe de f se représente graphiquement dans l'espace de repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
- Sa forme géométrique est une **surface** d'*équation explicite* $z = f(x,y)$.
- La projection orthogonale du graphe sur le plan (xOy) est aussi D_f.

→ Exemples MATLAB.

① $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2$ avec D_f = *disque unité* ou $D_f = [-1,1]^2$.

② $L : (x,y) \mapsto ax + by$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ fixé dont le graphe est une portion de plan.

II - Continuité des fonctions de deux variables

Rappels pour les fonctions d'une variable. Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une application et $x_0 \in D_f$. On dit que f est *continue en x_0* ssi $\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, (|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)}$.

NB : $\{x \in \mathbb{R}; |x - x_0| < \eta\} =]x_0 - \eta, x_0 + \eta[:= B(x_0, \eta)$ est appelé boule de centre x_0 et de rayon η.

Cas des fonctions de deux variables.

Definition (Disque (ou boule) ouvert(e))

Soit $M_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On appelle disque ouvert centré en M_0 et de rayon $\eta > 0$ l'ensemble défini par : $B(M_0, \eta) := \{M(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ ||\overrightarrow{M_0M}|| < \eta\}$ où $||\overrightarrow{M_0M}|| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

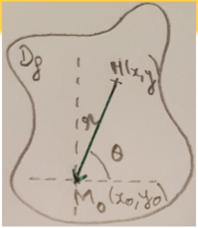
Definition (Continuité)

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une application avec $D_f \subset \mathbb{R}^2$ et $M_0(x_0, y_0) \in D_f$. On dit que f est *continue en M_0* ssi

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall M \in D_f, (\underbrace{M \in B(M_0, \eta)}_{\Leftrightarrow ||\overrightarrow{M_0M}|| < \eta}) \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon)}.$$

$\to$ voir simulation Matlab

II - Continuité des fonctions de deux variables



En pratique.

(i) On utilise les coordonnées polaires du vecteur $\overrightarrow{M_0M} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$

dans ce cas, on remarque que $||\overrightarrow{M_0M}|| \to 0 \Leftrightarrow r \to 0$.

(ii) On calcule $f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)$ et on utilise la proposition suivante :

Proposition (Condition Suffisante)

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $M_0(x_0, y_0) \in D_f$. On suppose qu'il existe une application $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que

① $\exists R > 0, \forall r \in [0, R[, \boxed{\forall \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}, |\boldsymbol{f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) - f(x_0, y_0)}| \leqslant \boldsymbol{g(r)}}$

② $\lim_{r\to 0} \boldsymbol{g(r)} = 0.$

Alors f est continue en M_0.

preuve. Soit $\varepsilon > 0$. D'après ②, on sait qu'$\exists \eta' > 0, \ (0 < r < \eta' \Rightarrow |g(r) - 0| = g(r) < \varepsilon)$.

On pose $\eta = \min(\eta', R)$ et on obtient
$(||\overrightarrow{M_0M}|| < \eta \Rightarrow ||\overrightarrow{M_0M}|| < R$ et $||\overrightarrow{M_0M}|| < \eta' \Rightarrow |f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) - f(x_0, y_0)| \leqslant g(r) < \varepsilon)$.

La définition de la continuité est démontrée.

II - Continuité des fonctions de deux variables

Exemple. Étudier la continuité en $(0,0)$ de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Correction. *en cours*

Propriété(s)

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$ et $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux applications continues en $M_0 \in D$. Alors,

(i) *La somme $(f+g)$ est continue en M_0.*

(ii) *Si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors (λf) est continue en M_0.*

(iii) *Le produit (fg) est continue en M_0.*

(iv) *Si $g(M_0) \neq 0$ alors le quotient $(\frac{f}{g})$ est continue en M_0.*

II - Continuité des fonctions de deux variables

NB : ① On admet que toute fonction composée de fonctions usuelles à l'aide des opérations précédentes est continue sur son domaine de définition.

(exemple : $f(x,y) = x^2y + \cos(xy)e^{\mathrm{Arctan}\, y}$ *ou* $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{1+x^2+y^2}$*.)*

② On note $f \in \mathscr{C}^0(D)$ si f est continue en tout point $M \in D$.

Proposition (fonctions composées)

- *Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$, $M_0(x_0, y_0) \in D$ et* $\boldsymbol{f : (x,y) \in D \mapsto f(x,y) \in \mathbb{R}}$ *une application* ***continue*** *en M_0.*
- *Soit I un intervalle ouvert contenant 0 et* $\boldsymbol{\Phi : t \in I \mapsto \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2}$ *une application* ***continue*** *en $t = 0$ telle que $\Phi(0) = (u(0), v(0)) = (x_0, y_0) = M_0$ et $\mathrm{Im}\Phi \subset D$.*
- *Alors la fonction composée* $\boldsymbol{f \circ \Phi : t \in I \mapsto f(u(t), v(t)) \in \mathbb{R}}$ *est* ***continue*** *en $t = 0$.*

preuve. *en TD*

NB : Le graphe de $f \circ \Phi$ est une courbe incluse dans la surface représentative de f.

→ exemple MATLAB

II - Continuité des fonctions de deux variables

Application. Cette proposition est utile pour démontrer qu'une fonction n'est pas continue, par contraposée :

$$f \circ \Phi \text{ non continue en } t = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{f \text{ non continue en } M_0} \text{ ou } \Phi \text{ non continue en } t = 0$$

Exemple. Montrons que la fonction définie par $\begin{cases} f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

Correction *en cours* **+ simulation MATLAB.**

Programme des TDs

Liste des exercices à effectuer dans l'ordre :

Exercice A.2.2 du poly. Recherche du domaine de définition d'une fonction

Exercice hors poly. A l'aide des quantificateurs, démontrer la proposition du transparent 7/9.

Exercice A.2.6 du poly. Applications de la condition suffisante de continuité en coordonnées polaires et de la contraposée de l'exercice précédent.

Exercice hors poly. A l'aide des quantificateurs, démontrer le résultat suivant.
Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$, $M(x_0, y_0) \in D$ et $f : (x, y) \in D \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ une application continue en M_0.
Soit I_1 un intervalle ouvert contenant x_0 et tel que $\{(x, y_0) \in \mathbb{R}^2;\ x \in I_1\} \subset D$.
Soit I_2 un intervalle ouvert contenant y_0 et tel que $\{(x_0, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in I_2\} \subset D$.
Montrer que les <u>applications partielles</u> $f_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ et $f_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f_1(x) = f(x, y_0) \quad \textit{et} \quad f_2(y) = f(x_0, y)$$

sont continues en x_0 et y_0, respectivement.