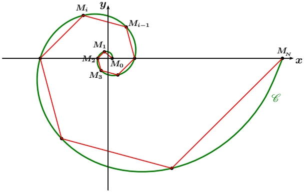
Chapitre 6 - Intégrale curviligne

I - Intégrale le long d'une courbe $\int_{\mathscr{C}} f(M)\, ds(M)$

$\boxed{A}$ Longueur d'une courbe

Soit $\mathscr{C}$ une courbe du plan ou de l'espace paramétrée par une application continue $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou 3).



Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on considère une subdivision $\{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ de $[a, b]$, de pas constant $h = t_i - t_{i-1} = \frac{b-a}{N}$. On pose $M_i = \Phi(t_i) = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$.

La longueur de la ligne polygonale (rouge) est

$$\ell_N = \sum_{i=1}^{N} ||\overrightarrow{M_{i-1}M_i}|| = \sum_{i=1}^{N} ||\overrightarrow{\Phi(t_{i-1})\Phi(t_i)}||.$$

Definition (courbe rectifiable)

On dit que la courbe $\mathscr{C}$ est **rectifiable** si l'ensemble $A = \{\ell_N \;;\; N \in \mathbb{N}^*\}$ admet une borne sup dans $\mathbb{R}$.
Dans ce cas, on définit la longueur de $\mathscr{C}$ par $\ell(\mathscr{C}) = \ell(\Phi([a, b])) = \sup A$.

Theorem

Soit $\mathscr{C}$ une courbe rectifiable paramétrée par $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ de classe $\mathscr{C}^1$. Alors

$$\ell(\mathscr{C}) = \int_a^b ||\Phi'(t)||\, dt = \int_a^b \underbrace{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}_{d=2}\, dt = \int_a^b \underbrace{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}}_{d=3}\, dt$$

preuve : • On a $\left\|\overrightarrow{\Phi(t_{i-1})\Phi(t_i)}\right\| = \left\|\int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi'(t)\,dt\right\| \leqslant \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\|\Phi'(t)\right\|\,dt.$

Par sommation on obtient $\ell_N = \sum_{i=1}^{N} ||\overrightarrow{\Phi(t_{i-1})\Phi(t_i)}|| \leqslant \int_a^b \|\Phi'(t)\|\,dt \quad \Rightarrow \quad \ell(\mathscr{C}) = \sup A \leqslant \int_a^b \|\Phi'(t)\|\,dt.$

• On définit l'application $\gamma(t) = \ell(\Phi([a,t]))$ (:= « longueur de la courbe entre $\Phi(a)$ et $\Phi(t)$ »).
Soit $h > 0$. Comme le plus court chemin est la ligne droite, on a $\|\overrightarrow{\Phi(t)\Phi(t+h)}\| \leqslant \ell(\Phi([t,t+h]))$.
Le point précédent nous donne un majorant et on en déduit l'encadrement :

$$\underset{\underset{||\Phi'(t)||}{\downarrow h \to 0^+}}{\frac{\|\overrightarrow{\Phi(t)\Phi(t+h)}\|}{h}} \leqslant \frac{\ell(\Phi([t,t+h]))}{h} = \underset{\underset{\gamma'(t)}{\downarrow h \to 0^+}}{\frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h}} \leqslant \underset{\underset{||\Phi'(t)||}{\downarrow h \to 0^+}}{\frac{1}{h}\int_t^{t+h} ||\Phi'(u)||\,du}$$

Chap 7-MT02, d'où $\gamma(a) = 0$ et $\gamma'(t) = ||\Phi'(t)|| \Rightarrow \ell(\Phi([a,b])) = \gamma(b) = \int_a^b \gamma'(t)\,dt = \int_a^b ||\Phi'(t)||\,dt.$

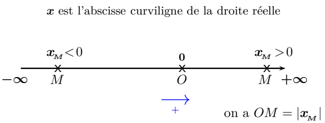
Exemple. Calculer la longueur d'une hélice paramétrée par $\Phi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ avec
$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\theta) = \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ a\theta \end{pmatrix}.$

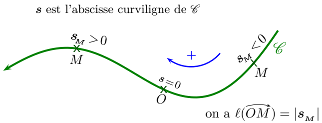
Correction. *en cours*

$\vdots$

I - Intégrale le long d'une courbe $\int_{\mathscr{C}} f(M)\, ds(M)$

B Abscisse curviligne





Definition (abscisse curviligne)

Soit $\mathscr{C}$ une courbe orientée (càd avec un sens de parcours imposé). Soit O un point de la courbe. On appelle **abscisse curviligne** s_M d'un point $M \in \mathscr{C}$, la **longueur signée** de l'arc de courbe $\overset{\frown}{OM}$: on note $s_M = \pm\ell(\overset{\frown}{OM})$.

Propriété(s)

Soit $\mathscr{C}$ une courbe paramétrée par $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ de classe $\mathscr{C}^1$ et orientée dans le sens croissant des valeurs de $t \in [a,b]$. Soit $O \in \mathscr{C}$ et $t_0 \in [a,b]$ tel que $O = \Phi(t_0)$. Alors l'abscisse curviligne de tout point $M = \Phi(t_M)$ est $\boxed{s_M = \int_{t_0}^{t_M} ||\Phi'(u)||du}$.

I - Intégrale le long d'une courbe $\int_{\mathscr{B}} f(M)\, ds(M)$

$\boxed{C}$ Intégrale le long d'une courbe $\int_{\mathscr{C}} f(M)\, ds(M)$

Definition

Soit $\mathscr{C}$ une courbe rectifiable et paramétrée par $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ de classe $\mathscr{C}^1$. On oriente $\mathscr{C}$ selon le sens croissant des valeurs de $t \in [a, b]$. On pose $A = \Phi(a)$ et $B = \Phi(b)$. Soit f une fonction continue de la variable s, abscisse curviligne de $\mathscr{C}$. Alors f est intégrable sur $\mathscr{C}$ et $\boxed{\int_{\mathscr{C}} f(M)\, ds(M) = \int_{s_A}^{s_B} f(s)\, ds}$.

Remarque : *En général les intégrands $f(M)$ sont plutôt exprimés en fonction des coordonnées cartésiennes de M. On utilise alors le changement de variable qui suit :*

Proposition

Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une application continue et $\mathscr{C} \subset \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée par $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ de classe $\mathscr{C}^1$. Alors f est intégrable le long de $\mathscr{C}$ et $\boxed{\int_{\mathscr{C}} f(M) ds(M) = \int_a^b f \circ \Phi(t)\, ||\Phi'(t)||\, dt}$.

II - Intégrale d'un champ de vecteur le long d'une courbe $\int_{\mathscr{C}} \vec{F}(M) \cdot \vec{d\ell}(M)$

$\boxed{A}$ Circulation d'un champ de vecteur ou travail d'une force $\overrightarrow{F}$

Exemple:***Énergie potentielle de la pesanteur exercée par la Terre sur une masse m au voisinage de la Terre***

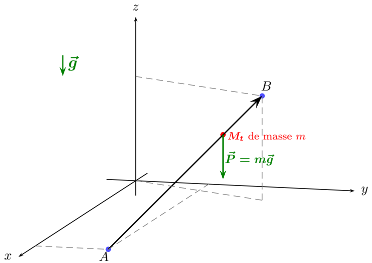
La force exercée est $\vec{P} = m\vec{g}$ (force constante).
L'énergie dépensée pour se déplacer le long d'un trajet rectiligne d'un point A vers un point B est $\boxed{\mathscr{T}_{\overrightarrow{AB}}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \overrightarrow{AB}}$.

Le chemin orienté $\overrightarrow{AB}$ est paramétrable par

$$M_t = \Phi(t) = (1-t)A + tB, t \in [0,1].$$

Avec une subdivision régulière $\{t_0, \ldots, t_N\}$ de $[0,1]$, on a

$$\begin{aligned}\mathscr{T}_{\overrightarrow{AB}}(\vec{P}) &= \sum_{i=1}^{N} \vec{P} \cdot \overrightarrow{\Phi(t_{i-1})\Phi(t_i)} \text{ (rel. de Chasles)} \\ &= \lim_{N \to +\infty} \sum_{i=1}^{N} \vec{P} \cdot \Phi'(t_{i-1}) \times \frac{1}{N} = \int_0^1 \vec{P} \cdot \Phi'(t)\, dt\end{aligned}$$



On généralise cette égalité à une trajectoire continue et une force quelconques.

Definition

Soit $\mathscr{C}$ une courbe rectifiable et paramétrée par $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ de classe $\mathscr{C}^1$ avec $a < b$. On oriente $\mathscr{C}$ selon le sens croissant des valeurs de $t \in [a,b]$. Soit $\vec{F} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs continu.
On appelle **circulation du champ de vecteur $\vec{F}$ ou travail de la force $\vec{F}$ le long de $\mathscr{C}$**, la quantité

$$\boxed{\int_{\mathscr{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b \vec{F}(\Phi(t)) \cdot \Phi'(t)\, dt}.$$

Notations : On a $d\vec{\ell} = \underbrace{\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}}_{\text{si } d=2}$ ou $d\vec{\ell} = \underbrace{\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}}_{\text{si } d=3}$.

- Si $d = 2$ et $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ alors on écrit $\displaystyle\int_{\mathscr{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\mathscr{C}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.
- Si $d = 3$ et $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$ alors on écrit $\displaystyle\int_{\mathscr{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\mathscr{C}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$.

Exemple. Soit $\mathscr{C}$ le bord du demi-disque défini par $\mathscr{C} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x^2 + (y-1)^2 = 1 \text{ et } x \geqslant 0\}$.
Calculer $\displaystyle\int_{\mathscr{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ avec $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$.

Correction. *en cours*

$$\vdots$$