$\boxed{B}$ Cas particullier des champs de vecteurs $\overrightarrow{F} = \nabla f$ (dérivant d'un potentiel scalaire)

Theorem

Soit $\vec{F} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un champ de vecteur continu. Soit $\mathscr{C}$ une courbe paramétrée par $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ de classe $\mathscr{C}^1$ et orientée dans le sens croissant des valeurs $t \in [a,b]$. S'il existe $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ telle que $\vec{F} = \nabla f$ alors $\displaystyle\int_{\mathscr{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = f(B) - f(A)$, où $A = \Phi(a)$ et $B = \Phi(b)$.

preuve dans le cas $d = 2$ avec $\Phi(t) = (x(t), y(t))$.

Soit $\vec{F} = \binom{P}{Q}$ dérivant du potentiel scalaire f. Alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$.

$$\int_{\mathscr{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\mathscr{C}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\mathscr{C}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))x'(t)dt + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))y'(t)dt.$$

On pose $g(t) = f(x(t), y(t))$. Alors $\displaystyle\int_{\mathscr{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b g'(t)\,dt = g(b) - g(a) = f(B) - f(A)$.

Exemple. Exercice A.1.11

Corollary

Sous les mêmes hypothèses et si $\mathscr{C}$ est une courbe fermée (càd $A = B$) alors $\displaystyle\int_{\mathscr{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 0$.

II - Intégrale d'un champ de vecteur le long d'une courbe $\int_{\mathscr{C}} \vec{F}(M) \cdot \vec{d\ell}(M)$

$\boxed{C}$ Théorème de Green-Riemann

Definition (compact simple)

① On appelle **compact élémentaire** de $\mathbb{R}^2$ toute partie D pouvant s'écrire des deux façons suivantes :

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ a \leqslant x \leqslant b \text{ et } \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ c \leqslant y \leqslant d \text{ et } \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\}.$$

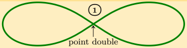
② On appelle **compact simple** de $\mathbb{R}^2$ toute partie pouvant s'écrire comme la réunion finie de compacts élémentaires.

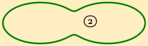
Definition

Soit $\mathscr{C}$ une courbe paramétrée par $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$.

① $\mathscr{C}$ admet un point double si Φ n'est pas injective sur $[a,b[$.

② On dit que $\mathscr{C}$ est fermée et sans point double ssi Φ est injective sur $[a,b[$ et $\Phi(a) = \Phi(b)$.



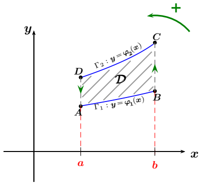


Theorem

Soit $\mathcal{D}$ un compact simple de $\mathbb{R}^2$ délimité par une courbe fermée $\mathscr{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$ (par morceau), sans point double, et parcourue dans le sens direct du plan (sens trigonométrique).

Soit $\vec{F} = \binom{P}{Q}$ un champ de vecteur de classe $\mathscr{C}^1$. Alors on a $\boxed{\displaystyle\int_{\mathscr{C}} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dxdy}$.

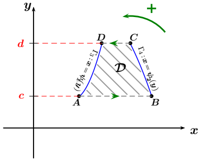
preuve. • Si $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ a \leqslant x \leqslant b \text{ et } \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}$ alors



- $$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b \Big[P(x,y) \Big]_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dx = \int_a^b [P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x))]dx$$

- $$\begin{aligned} \int_{\mathscr{C}} P(x,y)\,dx &= \int_{\Gamma_1} P(x,y)\,dx + \int_{\overrightarrow{BC}} P(x,y)\,dx + \int_{\Gamma_2} P(x,y)\,dx + \int_{\overrightarrow{DA}} P(x,y)\,dx \\ &= \int_a^b P(t,\varphi_1(t)) \times 1\,dt + \cancel{\int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} P(b,t) \times 0\,dt} + \int_b^a P(t,\varphi_2(t)) \times 1dt + \cancel{\int_{\varphi_2(a)}^{\varphi_1(a)} P(a,t) \times 0dt} \\ &= \int_a^b [P(t,\varphi_1(t)) - P(t,\varphi_2(t))]dt = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dxdy \end{aligned}$$

• Si $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ c \leqslant y \leqslant d \text{ et } \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\}$ alors



- $$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dx \right) dy = \int_c^d \Big[Q(x,y) \Big]_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy = \int_c^d [Q(\psi_2(y),y) - Q(\psi_1(y),y)]dy$$

- $$\begin{aligned} \int_{\mathscr{C}} Q(x,y)\,dy &= \int_{\Gamma_3} Q(x,y)\,dy + \int_{\overrightarrow{AB}} Q(x,y)\,dy + \int_{\Gamma_4} Q(x,y)\,dy + \int_{\overrightarrow{CD}} Q(x,y)\,dy \\ &= \int_d^c Q(\psi_1(t),t) \times 1\,dt + \cancel{\int_{\psi_1(c)}^{\psi_2(c)} Q(t,c) \times 0\,dt} + \int_c^d Q(\psi_2(t),t) \times 1dt + \cancel{\int_{\psi_2(d)}^{\psi_1(d)} P(t,d) \times 0dt} \\ &= \int_c^d [Q(\psi_2(t),t) - Q(\psi_1(t),t)]dt = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dxdy \end{aligned}$$

Cas particulier. Si $\vec{F} = \nabla f$ avec f de classe $\mathscr{C}^2$, on retrouve le corollaire du paragraphe $\boxed{\text{B}}$ pour les courbes fermées.

$$\int_{\mathscr{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\mathscr{C}} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dxdy = \iint_D \left(\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}(x,y) \right) dxdy = 0.$$

Exemple. Exercice A.1.12 du poly

Application au calcul d'aire.

On rappelle que l'aire d'un domaine D quarrable est $\mathcal{A}ire(D) = \iint_D 1\, dxdy$.

Si le bord de D est une courbe fermée, sans point double et parcourue dans le sens direct alors pour tout champ de vecteurs $\vec{F} = \binom{P}{Q}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant $\boxed{\forall (x,y) \in D,\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 1}$ on a

$$\boxed{\mathcal{A}ire(D) = \int_{\mathscr{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\mathscr{C}} Pdx + Qdy}.$$

Il y a une infinité de choix possibles

1. poly : $\vec{F}(x,y) = \frac{1}{2}\binom{-y}{x}$
2. plus simple : $\vec{F}(x,y) = \binom{0}{x}$ ou $\binom{-y}{0}$
3. à éviter : $\vec{F}(x,y) = \binom{xy^2 + \sin(y)}{yx^2 + x(1+\cos(y))}$

Exemple 1 : Calculer l'aire du domaine délimité par une ellipse $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\}$.

Exemple 2 : Calculer l'aire du domaine délimité par un polygône de sommets $P_1(x_1, y_1), \ldots, P_N(x_N, y_N)$, orientés dans le sens direct.

Corrections. *en cours*