Chapitre 7 - Intégrale de surface

Dans ce chapitre, on souhaite définir l'intégrale d'une fonction continue et bornée sur une ***surface qui n'est contenue dans aucun plan*** *d'équation :* $\boldsymbol{x = cste}$ ou $\boldsymbol{y = cste}$ ou $\boldsymbol{z = cste}$

On étudiera alors les deux cas suivants :

1. les surfaces S définies par une équation paramétrique

$$M \in S \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(u, v), \quad (u, v) \in \Delta.$$

2. Les surfaces définies par une équation explicite

$$S = \left\{M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; z = g(x, y) \text{ et } (x, y) \in D\right\}^{1}.$$

I - Aire d'une surface

Remarque : • Soit $ABCD$ un parallélogramme dans l'espace de repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Étant données les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix}$, on a $\boxed{\mathcal{A}ire(ABCD) = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\|}$.

• **Comparaison avec le chap. 4** : Si $ABCD$ est contenu dans le plan $z = 0$ alors $w_1 = w_2 = 0$ et

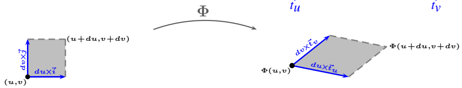
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\| = |u_1 v_2 - u_2 v_1| = \left|\det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}\right|.$$

$\longrightarrow$ On retrouve la formule d'aire d'un parallélogramme inclu dans le plan (xOy) vue au chapitre 4.

1. ou bien $S = \left\{M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; y = g(x, z) \text{ et } (x, z) \in D\right\}$ ou bien $S = \left\{M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x = g(y, z) \text{ et } (y, z) \in D\right\}$.

$\boxed{A}$ Surfaces paramétrées

Si Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ alors $\Phi(u+du, v+dv) = \Phi(u,v) + \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,v)}_{\vec{t}_u} \times du + \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,v)}_{\vec{t}_v} \times dv + \underbrace{||(du,dv)||\varepsilon(du,dv)}_{\text{reste négligeable}}$



$R_\infty \longrightarrow \Phi(R_\infty)$

Theorem

Soit S une surface de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par $\Phi : \Delta \to \mathbb{R}^3$ avec $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ quarrable. On suppose que Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ au moins, bijective de Δ sur S, et telle que $\forall (u,v) \in \Delta$, $\|\vec{t}_u \wedge \vec{t}_v\| \neq 0$. Alors on a

$$\boxed{\mathcal{A}ire(S) = \iint_\Delta \|\vec{t}_u \wedge \vec{t}_v\| \, dudv} \qquad \text{où } \vec{t}_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{t}_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Remarque : • Le terme $\|\vec{t}_u \wedge \vec{t}_v\| \, dudv$ indique l'aire de $\Phi(R_\infty)$ dans l'espace.
• Cette formule est compatible avec la formule d'aire vue au chapitre 4,
Si $S \subset (xOy)$ alors Φ est tout simplement le changement de variable $\begin{pmatrix} x = \Phi_1(u,v) \\ y = \Phi_2(u,v) \end{pmatrix}$ vu au Chap. 4-§*III* et

$$\mathcal{A}ire(S) = \iint_S 1 \, dxdy = \iint_\Delta |J_\Phi(u,v)| dudv \text{ avec } |J_\Phi(u,v)| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \end{pmatrix} \right| = \|\vec{t}_u \wedge \vec{t}_v\|.$$

Notations : • On notera $\boldsymbol{d\sigma}$ l'élément d'aire infinitésimal sur S et on utilise la notation $\boxed{\mathcal{A}ire(S) = \iint_S 1 \, d\sigma}$

- Si la surface S est contenue dans le plan $z = \boldsymbol{cste}$ alors $\boldsymbol{d\sigma} = \boldsymbol{dxdy}$.
- Si la surface S est contenue dans le plan $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{cste}$ alors $\boldsymbol{d\sigma} = \boldsymbol{dxdz}$.
- Si la surface S est contenue dans le plan $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{cste}$ alors $\boldsymbol{d\sigma} = \boldsymbol{dydz}$.

Exercice. Calculer l'aire de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ avec $R > 0$ fixé.

Correction. *en cours*

$$\vdots$$

$\boxed{B}$ Surfaces explicites

Corollary

Soit S une surface de $\mathbb{R}^3$ définie explicitement par $S = \left\{M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, ; \; z = g(x,y) \text{ et } (x,y) \in D\right\}$ avec $D \subset \mathbb{R}^2$ quarrable. Alors l'aire de la surface S est $\mathcal{A}ire(S) = \iint_D \sqrt{1 + (\frac{\partial g}{\partial x})^2 + (\frac{\partial g}{\partial y})^2} \, dxdy$.

Preuve.

Exercice A.1.4 du poly.
Correction. *en cours*

II - Intégrale de surface $\iint_S f(x,y,z)\,d\sigma$

$\boxed{A}$ Définition

Une fois que $\mathcal{A}ire(S) = \iint_S 1\,d\sigma$ *est correctement défini, on peut étendre cette définition à des intégrands* $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$ *continus et bornés pour* $(x,y,z) \in S$.

Definition

Soit S une surface de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par $\Phi : \Delta \to \mathbb{R}^3$ avec $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ quarrable. On suppose que Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ au moins, bijective de Δ sur S, et telle que $\forall\,(u,v) \in \Delta,\ \|\vec{t}_u \wedge \vec{t}_v\| \neq 0$. Alors on définit l'**intégrale de surface d'une fonction f continue et bornée sur S** par

$$\boxed{\iint_S f(x,y,z)\,d\sigma = \iint_\Delta f \circ \Phi(u,v)\ \|\vec{t}_u \wedge \vec{t}_v\|\,dudv} \qquad \text{où } \vec{t}_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{t}_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Exercice A.1.12 du poly

Correction. *en cours*

$\vdots$