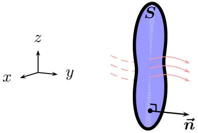
$\boxed{B}$ Flux d'un champ de vecteur à travers une surface orientée $\iint_S \vec{V}\cdot\vec{n}\,d\sigma$

Exemple : ***Flux/Débit à vitesse constante.***



Soit S une surface plate de vecteur normal unitaire $\vec{n}$ (càd $||\vec{n}|| = 1$).
Soit $\vec{V} = v\vec{n}$ le vecteur densité de flux modélisant la traversée d'un fluide à travers S. Ici, v est la vitesse de l'écoulement.
À vitesse v constante, le débit est calculé par la formule $\mathcal{A}ire(S) \times v$ en $\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^{-1}$.
Il s'agit d'une intégrale : $\displaystyle\iint_S \vec{V}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_S v\,\underbrace{(\vec{n}\cdot\vec{n})}_{=1}\,d\sigma = v\iint_S 1\,d\sigma = v \times \mathcal{A}ire(S)$.

Orientation des surfaces :

1. On voit bien que le calcul du flux dépend de l'orientation de la normal unitaire $\vec{n}$ et est donc défini à un signe près.
2. Lorsque la surface est fermée (comme l'ellipsoide), on dirige le champ des normales unitaires $\vec{n}$ soit vers l'intérieur, soit vers l'extérieur de la surface S.
3. Lorsque la surface est ouverte (comme une portion de paraboloïde), on oriente le champ des normales unitaires $\vec{n}$ selon le signe d'une composante ou d'autres critère équivalents.

Exemples A.1.13 du poly :

Correction. *en cours*

$\vdots$

Definition

Soit $\vec{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs continu et S une surface orientée par la donnée d'un champ de vecteurs unitaires et normaux à S, noté $\vec{n}$. On définit **le flux de $\vec{V}$ à travers S** par la formule

$$\mathcal{Flux}_S(\vec{V}) = \iint_S \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma$$

Calcul pratique : pour les surfaces paramétrées par $\Phi : (u, v) \in \Delta \to \Phi(u, v) = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix} \in S$ de classe $\mathscr{C}^1$.

1. On calcule $\vec{t}_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \end{pmatrix}$ et $\vec{t}_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \end{pmatrix}$ puis $\boxed{\vec{N} = \pm\, \vec{t}_u \wedge \vec{t}_v}$.
2. En fonction de l'orientation de S donnée par l'énoncé, on choisit entre $\vec{N} = +\vec{t}_u \wedge \vec{t}_v$ et $\vec{N} = -\vec{t}_u \wedge \vec{t}_v$.
3. On calcule $\vec{V} \cdot \vec{n} = \vec{V}\big(\Phi_1(u, v), \Phi_2(u, v), \Phi_3(u, v)\big) \cdot \frac{\vec{N}}{||\vec{N}||}$
4. On remplace $\boldsymbol{d\sigma}$ par l'élément d'aire $\|\vec{t}_u \wedge \vec{t}_v\|\, \boldsymbol{dudv}$
5. Finalement, on obtient

$$\mathcal{Flux}_S(\vec{V}) = \iint_\Delta \vec{V}\big(\Phi_1(u, v), \Phi_2(u, v), \Phi_3(u, v)\big) \cdot \frac{\vec{N}}{\cancel{||\vec{N}||}} \times \cancel{\|\vec{t}_u \wedge \vec{t}_v\|}\, dudv = \iint_\Delta \vec{V}\big(\Phi_1(u, v), \Phi_2(u, v), \Phi_3(u, v)\big) \cdot \vec{N}\, dudv$$

Exercice A.1.14 du poly.

Correction. *en cours*

$\vdots$

Exercice A.1.15 du poly.

Correction. *en cours*

$\vdots$