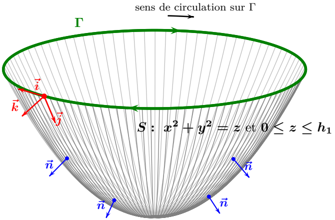
Chapitre 8 - Théorèmes généraux

I - Théorème de Stokes-Ampère (voir PS24 ?)

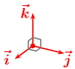
A Orientation des surfaces non fermées



Soit S une surface de $\mathbb{R}^3$ ouverte et de bord Γ (courbe fermée). On dit que S et Γ sont *orientées de façon cohérente* si **la règle de la main droite**① ($\Leftrightarrow$ du tire-bouchon de Maxwell) ou du bonhomme d'Ampère② est satisfaite.

① La règle de la main droite consiste à former un repère orthonormé direct $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec les 3 doigts de la main droite comme suit

$$\begin{array}{ccc} \vec{i} & \longleftrightarrow & \text{index} \\ \vec{j} & \longleftrightarrow & \text{majeur} \\ \vec{k} & \longleftrightarrow & \text{pouce} \end{array}$$



- Le vecteur $\vec{i}$ indique le sens de circulation sur la courbe Γ.
- Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont des vecteurs tangents à la surface S. (⚠ $\vec{j}$ est orienté vers la surface S).
- Le vecteur $\vec{k}$ indique l'orientation du vecteur normal $\vec{n}$ à la surface S.

② à voir en ligne peut-être.

B Théorème et applications

Theorem (Stokes-Ampère)

Soit S une surface de $\mathbb{R}^3$ ouverte de classe $\mathscr{C}^1$ et de bord Γ (qui est une courbe fermée).
On suppose que le sens de circulation sur Γ est cohérent avec l'orientation du champ des normales unitaires $\vec{n}$ à la surface S selon l'une des règles précédentes.
Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$. Alors la circulation de $\vec{V}$ le long de Γ est égal au flux de $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{V}$ à travers S

$$\int_\Gamma \vec{V}\cdot\vec{d\ell} = \mathcal{Flux}_S(\overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{V}) = \iint_S \overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{V}\cdot\vec{n}\,d\sigma.$$

Remarque : Dans le cas où la surface S est plane et incluse dans le plan $z=0$, on retrouve la formule de Green-Riemann du Chap. 6 en circulant sur Γ dans le sens direct.

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix},\ \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{d\ell} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{V}\cdot\vec{d\ell} = P\,dx + Q\,dy\,,\ \overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix} \text{ et } d\sigma = dxdy.$$

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy = \iint_S \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)}_{=\,\overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{V}\cdot\vec{n}} dxdy = \mathcal{Flux}_S(\overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{V}).$$

Exercice de cours A.1.3. Question 2.

Correction en cours.

II - Théorème de Gauss-Ostrogradski (voir PS22 ?)

Remarque : Soit $\vec{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe $\mathscr{C}^1$ avec $\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$. Alors,

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Theorem (Gauss-Ostrogradski)

Soit Ω un volume de $\mathbb{R}^3$ délimité par une surface fermée S (appelée bord de Ω) de classe $\mathscr{C}^1$.
On suppose que le bord de S est orienté par le champ des normales unitaires $\vec{n}$ dirigées vers l'extérieur de Ω.
Alors pour tout champ de vecteurs $\vec{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de classe $\mathscr{C}^1$ on a

$$\iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}\vec{V}(x, y, z)\, dxdydz = \mathcal{Flux}_S(\vec{V}) = \iint\limits_{S} \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma$$

Fondamental en Éléments Finis : UVs de mécanique numérique en branche

Remarque : Le cas de la dimension 2 est équivalent à la formule de Green-Riemann démontrée au chapitre 4.

Exercice de cours A.1.8.

Correction en cours.

$\vdots$