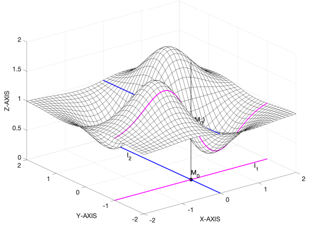
III - Applications partielles d'une fonction de deux variables

Definition

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ où D est une partie de $\mathbb{R}^2$ et $M_0(x_0, y_0) \in D$.
Soit I_1 un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant x_0 et tel que $\{(x, y_0) \in \mathbb{R}^2;\ x \in I_1\} \subset D$.
Soit I_2 un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant y_0 et tel que $\{(x_0, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \in I_2\} \subset D$.
On définit alors deux **applications partielles** $f_1 : x \in I_1 \mapsto f(x, y_0)$ et $f_2 : y \in I_2 \mapsto f(x_0, y)$.

Soit $f(x, y) = 4xye^{-(x^2+y^2)} + 1$ définie sur $[-2, 2]^2$.
Considérons le point $M_0(0, -1)$.

On a $f_1(x) = -4xe^{-x^2-1} + 1$ et $f_2(y) = 1$.
Il s'agit de deux fonctions de la variable réelle toutes deux définies sur l'intervalle $[-2, 2]$.



Proposition

Avec les mêmes notations, on suppose que $f : D \to \mathbb{R}$ est continue en $M_0 \in D$.
Alors l'application $f_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ est continue en x_0 et l'application $f_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ est continue en y_0.

preuve : exercice de TD 1.

⚠ La réciproque est fausse !

Contre-exemple : On a montré que l'application définie par $\begin{cases} f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 & \end{cases}$ n'est pas continue en $(0,0)$. Cependant, les applications partielles associées le sont :

- $f_1(x) = f(x,0) = \begin{cases} \frac{x\times 0}{x^2+0^2} = 0, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = 0 \Rightarrow$ f_1 est continue en $x_0 = 0$.
- Par symétrie, on a $f_2(y) = f_1(y) = 0$ donc f_2 est aussi continue en $y_0 = 0$.

Definition (Dérivées partielles en un point)

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une application où $D \subset \mathbb{R}^2$ et $M_0(x_0, y_0) \in D$. On pose $f_1(x) = f(x, y_0)$ et $f_2(y) = f(x_0, y)$.

① Si l'application partielle f_1 est **dérivable** en x_0 alors on dit que f admet une **dérivée partielle par rapport à x au point M_0** et on note $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_1'(x_0)$.

② Si l'application partielle f_2 est **dérivable** en y_0 alors on dit que f admet une **dérivée partielle par rapport à y au point M_0** et on note $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_2'(y_0)$.

Calcul pratique. ① **Si $f(x_0, y_0)$ est donné par une expression algébrique**, alors on applique les règles de dérivation des fonctions d'une variable réelle f_1 et f_2.
② **Si $f(x_0, y_0)$ n'est pas donné par une expression algébrique**, alors on utilise la définition du nombre dérivé de f_1 et f_2 comme limite d'un taux d'accroissement :

$$f_1'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_1(x_0+h) - f_1(x_0)}{h} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}}$$

$$f_2'(y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{f_2(y_0+k) - f_2(y_0)}{k} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k}}$$

Exemple. Calculer les dérivées partielles en tout point de $\begin{cases} f(x,y) = \frac{y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Correction *en cours*.

⚠ Il n'y a aucun lien logique entre la continuité de f en M_0 et l'existence des dérivées partielles en M_0.
L'implication vraie est « $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ existe $\Rightarrow f_1$ continue en x_0 » mais pas f.

IV - Différentiabilité des fonctions de deux variables

$\boxed{A}$ Définitions.

Rappels pour les fonctions d'une variable. Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in D_f$. On dit que f est dérivable en x_0 s'il existe un réel $d \in \mathbb{R}$ et une fonction ε définie au voisinage de 0 telle que $\varepsilon(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$ et

$$\forall\, x_0 + h \in D_f, \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + d \times h + |h|\varepsilon(h) \qquad (*).$$

On sait que $d = f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Remarques. ① L'application $L : h \in \mathbb{R} \mapsto d \times h$ apparaissant dans $(*)$ est linéaire.
② **Les applications linéaires de deux variables** sont de la forme $L : (h,k) \in \mathbb{R}^2 \mapsto A \times h + B \times k$ où A et B sont 2 réels fixés.

Definition (Différentiabilité)

Soit D une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ une application et $M_0(x_0, y_0) \in D$.
On dit que f est **différentiable en M_0** s'il existe
- une *application linéaire* $L : (h,k) \in \mathbb{R}^2 \to A \times h + B \times k$

et • une fonction ε définie au voisinage de $(0,0)$ telle que $\lim\limits_{||(h,k)|| \to 0} \varepsilon(h,k) = 0$ et

$$\boxed{\forall\, (x_0 + h, y_0 + k) \in D, \quad f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + A \times h + B \times k + ||(h,k)||\varepsilon(h,k)}\,.$$

NB : Le plan d'équation $z = f(M_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0)$ est appelé **plan tangent** au graphe de f au point $(x_0, y_0, f(M_0))$.

Exemple. Montrons que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + y^2$ est différentiable en tout point $M_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Correction *en cours*.

→ simulation MATLAB

Definition (Différentielle)

Soit D une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ une application différentiable en tout point $M_0(x_0, y_0) \in D$. L'application linéaire L introduite précédemment est appelée **différentielle de f au point (x_0, y_0) et notée** $df(x_0, y_0)$. Elle est définie à partir des dérivées partielles de f :

$$df(x_0,y_0) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (h,k) & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k. \end{array}$$

Autre notation justifiée dans le poly. $df(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)dy.$

$\boxed{B}$ Liens logiques.

Proposition

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une application où D est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ et $M_0(x_0, y_0) \in D$.
Si f est différentiable en M_0 alors f est continue en M_0.

preuve. Soient $L(h,k) = Ah + Bk$ et ε une fonction telle que $\varepsilon(h,k) \underset{||(h,k)|| \to 0}{\longrightarrow} 0$ (donc bornée par C au vois.) et

$$\boxed{\forall\, (x_0+h, y_0+k) \in D, \quad f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + A \times h + B \times k + \sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k) \quad (*)}.$$

On a alors, $\left|f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0)\right| = \left|A \times h + B \times k + \sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k)\right|$.
On passe en coordonnées polaires pour les variables (h,k) : $h = r\cos\theta$, $k = r\sin\theta$

$$\begin{aligned}\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \ \left|f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) - f(x_0,y_0)\right| &\leqslant \left|Ar\cos\theta\right| + \left|Br\sin\theta\right| + r\left|\varepsilon(r\cos\theta, r\sin\theta)\right| \\ &\leqslant r(|A| + |B| + |C|).\end{aligned}$$

On pose $g(r) = r(|A| + |B| + |C|) \underset{r \to 0}{\longrightarrow} 0$.
La condition suffisante de continuité de f en M_0 est satisfaite.

Proposition

Si f est différentiable en M_0 alors f admet des dérivées partielles en M_0.

preuve. Pour obtenir $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = f_1'(x_0)$, on pose $k = 0$ et $h \neq 0$ dans $(*)$.
Il vient $f_1(x_0+h) = f_1(x_0) + Ah + |h|\varepsilon(h,0)$. Donc f_1 est dérivable et $f_1'(x_0) = A$. *(Idem avec f_2.)*

Remarque : Les fonctions $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ sont des fonctions de deux variables. On étudie leur continuité en un point M_0 avec les outils du paragraphe II.

Theorem

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une application où D est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ et $M_0(x_0, y_0) \in D$.
Si les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont définies et continues au voisinage de M_0 alors f est différentiable en M_0.

preuve. A lire

Definition

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une application où $D \subset \mathbb{R}^2$ admettant des dérivées partielles continues en tout point $M_0(x_0, y_0) \in D$. On dit que f est **continûment différentiable ou de classe $\mathscr{C}^1$** sur D. On note $f \in \mathscr{C}^1(D)$.

⚠ Les réciproques des énoncés précédents sont fausses.

Exemple. Poursuivre l'étude de la différentiabilité et de la continuité des dérivées partielles de

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Correction *en cours*.

V - Dérivées partielles d'ordre supérieur

$\boxed{A}$ Dérivées partielles secondes.

Definition

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur D.
Lorsqu'elles existent, on définit les dérivées partielles secondes comme suit :

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{h}.$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0, y_0) = \lim\limits_{k \to 0} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0+k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{k}.$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0, y_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{h}.$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0) = \lim\limits_{k \to 0} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{k}.$

Exemple. Calculer les dérivées partielles secondes de $f(x, y) = y^3 \cos x$ en tout point de $D = \mathbb{R}^2$.
Que remarque-t-on ?

Correction *en cours*.

Programme des TDs

Liste des exercices à effectuer dans l'ordre :

Exercice A.2.9 du poly. Questions (2), (3), (4) et (5).
Dérivées partielles, différentiabilité et continuité des dérivées partielles en $(0,0)$.
(Indication : utiliser les contraposées des liens logiques vus en cours pour répondre aux questions).

Exercice hors poly. Fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
Montrer que la fonctions définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
(Indication : démontrer directement la continuité des dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$).

Exercice A.2.10 du poly. Dérivées partielles secondes et Théorème de Schwarz
(Calculer au moins les dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$).

Exercice A.2.17 du poly. Dérivées partielles secondes et Théorème de Schwarz
(Vous pouvez au moins faire la première question).