B Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, $k \in \mathbb{N}$

Definition

① Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $D \subset \mathbb{R}^2$ et que toutes ses dérivées partielles sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur D, alors on dit que f est **de classe $\mathscr{C}^2$ sur D**.
② Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, si f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $D \subset \mathbb{R}^2$ et que toutes ses dérivées partielles d'ordre k sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur D alors on dit que f est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur D.
③ Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur D alors on dit que f est **de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D**.

NB : On admet que toute fonction composée de fonctions usuelles *(polynôme,* $\cos$, $\sin$, $\tan$, $\exp$, $\ln$, Arctan*)* est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son domaine de définition.
Pour les fonctions $\sqrt{\cdot}$, Arccos, Arcsin, il faut faire attention au domaine de dérivabilité.

Theorem (de **symétrie de Schwarz** (admis))

*Soit D une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une application de **classe $\mathscr{C}^2$** sur D. Alors les **dérivées secondes croisées** $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont égales.*

NB : Ce théorème se généralise aux fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, $(k \geqslant 3)$.

Exemple. Calculer les dérivées partielles croisées d'ordre 3 de $f(x, y) = y^3 \cos x$.

Correction. *en cours*

V - Formule de Taylor et recherche d'extrema locaux

A Formule de Taylor-Young

Proposition (Taylor-Young à l'ordre 1)

*Soit D une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ et $\boldsymbol{f : (x, y) \in D \mapsto f(x, y)}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur D. Soit $M_0 \in D$. Alors il existe une fonction ε, **définie au vois. de 0**, telle que $\lim\limits_{||(h,k)|| \to 0} \varepsilon(h, k) = 0$ et pour tout point $M(x_0 + h, y_0 + k) \in D$ tel que $[M_0 M] \subset D$, on a*

$$\boxed{f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + ||(h, k)||\varepsilon(h, k)}.$$

Rappels pour les fonctions d'une variable. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Alors il existe une fonction ε, définie sur I, telle que

$$\forall\, x = a + h \in I,\ f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + h^2\varepsilon(h) \quad \text{et} \quad \varepsilon(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Cas des fonctions de deux variables.

Proposition (Taylor-Young à l'ordre 2)

On suppose maintenant que f est de classe $\mathscr{C}^2$. Suivant les mêmes conditions, le développement s'écrira

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) = \ & f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ & + \frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)\right) + ||(h, k)||^2\varepsilon(h, k) \end{aligned}$$

$\boxed{B}$ Recherche d'extrema locaux

Definition (Extremum local)

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$ et $\boldsymbol{f : (x, y) \in D \mapsto f(x, y)}$ une application. Soit $M_0 \in D$.
① On dit que M_0 réalise un ***mimimum local*** de f sur D si $\exists\, \eta > 0,\ \forall\, M \in B(M_0, \eta) \cap D,\ f(M) \geqslant f(M_0)$.
② On dit que M_0 réalise un ***maximum local*** de f sur D si $\exists\, \eta > 0,\ \forall\, M \in B(M_0, \eta) \cap D,\ f(M) \leqslant f(M_0)$.

Theorem (Condition nécessaire d'optimalité)

Soit D une partie **ouverte** *de $\mathbb{R}^2$ et $\boldsymbol{f : (x, y) \in D \mapsto f(x, y)}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur D.*

$$\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)} \textit{ réalise un extremum local de } \boldsymbol{f} \textit{ sur } \boldsymbol{D} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0} \\ \boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.} \end{array} \right.$$

preuve (dans le cas d'un minimum local). *Identique à celle des fonctions d'une variable.*
Soit M_0 réalisant un minimum local de f sur D. On peut choisir η tel que $B(M_0, \eta) \subset D$.

- $\forall 0 < h < \eta$, on a $M(x_0 + h, y_0) \in B(M_0, \eta) \Rightarrow f(M) \geqslant f(M_0) \Rightarrow \dfrac{f(M) - f(M_0)}{h} \geqslant 0 \underset{\substack{\text{pass. à la lim.} \\ \text{qd } h \to 0}}{\Rightarrow} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \geqslant 0.$
- $\forall -\eta < h < 0$, on a $M(x_0 + h, y_0) \in B(M_0, \eta) \Rightarrow f(M) \geqslant f(M_0) \Rightarrow \dfrac{f(M) - f(M_0)}{h} \leqslant 0 \underset{\substack{\text{pass. à la lim.} \\ \text{qd } h \to 0}}{\Rightarrow} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \leqslant 0.$

D'où $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$.

- On procède de la même façon avec $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ et les points $M(x_0, y_0 + k)$ pour $-\eta < k < \eta$.

⚠ La réciproque est fausse.

contre-exemple. Considérons la fonction définie par $f(x,y) = xy$ en $M_0(0,0)$.

Méthodologie pour la recherche d'extrema locaux.

1. On recherche l'ensemble des points critiques, càd les solutions du système $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0. \end{cases}$

   Exemple. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

2. Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ on peut utiliser la formule de T-Y à l'ordre 2 pour conclure :

$$\underbrace{f(x_0+h, y_0+k)}_{f(M)} - \underbrace{f(x_0,y_0)}_{f(M_0)} = \frac{1}{2!}\left(h^2 \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)}_{=a} + 2hk \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)}_{=b} + k^2 \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)}_{=c} \right) + \underbrace{||(h,k)||^2 \varepsilon(h,k)}_{\text{négligeable}}$$

Le signe de $f(M) - f(M_0)$ dépend du signe du discriminant $\boxed{\widetilde{\boldsymbol{\Delta}} = \boldsymbol{b^2 - ac}}$ *(justification en cours)*.

- Si $\tilde{\Delta} > 0$ alors M_0 n'est ni un maximum local, ni un minimum local. Il s'agit d'un point selle.
- Si $\tilde{\Delta} < 0$ alors le polynôme est de signe constant et
  - (i) si $a > 0$ alors le polynôme en (h,k) est positif et M_0 est un minimum local.
  - (ii) si $a < 0$ alors le polynôme en (h,k) est négatif et M_0 est un maximum local.
- Si $\tilde{\Delta} = 0$ alors on ne peut pas conclure. Il faut poursuivre l'étude du signe de $f(M) - f(M_0)$ par un autre moyen.

$\rightarrow$ voir simulation Matlab

Poursuivre l'exemple. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

VI - Dérivées partielles de fonctions composées

Rappels pour les fonctions d'une variable. Soit $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_2 \to \mathbb{R}$, avec $\operatorname{Im} f \subset D_2$, deux applications dérivables. Alors $g \circ f$ est dérivable et $\forall\, x \in D_1$, $\boxed{(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))}$.

Cas des fonctions de deux variables.

Proposition (Composition à gauche par une fonction d'une variable)

Soit D une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ et $\boldsymbol{f : (x, y) \in D \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}}$ une application différentiable sur D.
Soit $\boldsymbol{g : t \in I \mapsto g(t)}$ une application dérivable sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ contenant $\operatorname{Im} f$.
Alors $\boldsymbol{g \circ f : (x, y) \in D \mapsto g\big(f(x, y)\big)}$ est différentiable sur D et on a

$$\boxed{\frac{\partial g\circ f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \times g'\big(f(x, y)\big)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\frac{\partial g\circ f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \times g'\big(f(x, y)\big)}.$$

Proposition (Composition à droite par une fonction d'une variable)

Soit D une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ et $\boldsymbol{f : (x, y) \in D \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}}$ une application différentiable sur D.

Soit $\boldsymbol{\Phi : t \in I \mapsto \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2}$ une application dérivable sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, avec $\operatorname{Im} \Phi \subset D$.

Alors $\boldsymbol{f \circ \Phi : t \in I \mapsto f(u(t), v(t))}$ est dérivable sur I et on a

$$\boxed{(f \circ \Phi)'(t) = u'(t) \times \frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t)) + v'(t) \times \frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t))}.$$

Proposition (Composition de fonctions de plusieurs variables)

*Soit D une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ et $f : (x, y) \in D \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ une application différentiable sur D.
Soient $\varphi_1 : (t, s) \mapsto \varphi_1(t, s)$ et $\varphi_2 : (t, s) \mapsto \varphi_2(t, s)$ différentiables sur $\mathbb{R}^2$ avec $\{\operatorname{Im}\varphi_1 \times \operatorname{Im}\varphi_2\} \subset D$.
Alors l'application $F : (t, s) \mapsto f(\varphi_1(t, s), \varphi_2(t, s))$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et on a*

- $\frac{\partial F}{\partial t}(t, s) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, s) \times \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(t, s), \varphi_2(t, s)) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t, s) \times \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_1(t, s), \varphi_2(t, s))$
- $\frac{\partial F}{\partial s}(t, s) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial s}(t, s) \times \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(t, s), \varphi_2(t, s)) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial s}(t, s) \times \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_1(t, s), \varphi_2(t, s))$.

Exercice. Déterminer les dérivées partielles des fonctions suivantes

1. $F(x, y) = \cos(x + y)$
2. $G(t) = F(e^t, \operatorname{Arctan} t)$
3. $H(x, y) = F(xy, 2x - 3y)$

Correction. *en cours.*

Programme des TDs

Liste des exercices à effectuer dans l'ordre :

Finir A.2.10 et A.2.17 sur le théorème de Schwarz.

Exercice hors poly. Recherche d'extrema locaux
1. Déterminer les points critiques des fonctions suivantes

(a) $f(x, y) = xy(1 - x - y)$.

(b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3\lambda xy$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) $f(x, y) = x^2 - \cos(y)$.

2. Préciser leur nature (minimum ou maximum local, point selle).

Exercice A.2.13 du poly. (2) et (6) Calcul de dérivées partielles pour 3 variables
(Calculer une différentielle revient à calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, *et* $\frac{\partial f}{\partial z}$. *Puis donner l'expression de df en fonction des différentielles élémentaires dx, dy et dz avec la notation* $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$.*)*

Exercice A.2.14 du poly. (1), (2) et (3) Dérivées partielles de fonctions composées