Chapitre 2 - Analyse vectorielle

I - Les opérateurs différentiels ∇, $\overrightarrow{\text{Rot}}$, div et Δ

Definition (Le gradient ∇f ou $\overrightarrow{\text{grad}} f$)

Soit D une partie ouverte de $\mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une application différentiable. On appelle **vecteur gradient de f**, noté ∇f ou $\overrightarrow{\text{grad}} f$, le champ de vecteurs défini pour tout $M \in D$ par

$$\nabla f(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \text{ si } d = 2 \text{ ou } \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} \text{ si } d = 3$$

Interprétation. Optimisation par descente de gradient : UV RO04 - BR GI / IM.

Soit $\vec{v} \in \mathbb{R}^d$ et $t \in \mathbb{R}$ un paramètre. Alors $f(M_0 + t\vec{v}) = f(M_0) + \nabla f(M_0) \cdot (t\vec{v}) + |t|\varepsilon(t), \quad \varepsilon(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0.$

On pose $\boxed{\vec{v} = -\nabla f(M_0)}$. On obtient $f(M_0 + t\vec{v}) = f(M_0) - t||\nabla f(M_0)||^2 + |t|\varepsilon(t)$.

Si $t > 0$ est assez petit et $\nabla f(M_0) \neq 0$ alors on a $f(M_0 + t\vec{v}) < f(M_0)$.

On dit que *“ Le vecteur $-\nabla f(M_0)$ indique la direction à suivre pour minimiser une fonctionnelle”*.

Exemple. Prenons $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2$ qui admet un minimum global en l'origine.

Partant du point $M_0(-2,0)$ observons la descente de gradient à pas constant $t = 0.1$ ...

$\rightarrow$ simulation MATLAB.

Definition (Rotationnel)

Soit D une partie ouverte de $\mathbb{R}^3$ et $\vec{V} : D \to \mathbb{R}^3$ une application différentiable. On appelle **rotationnel de $\vec{V}$**, noté $\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{V}$, le champ de vecteur défini pour tout $M(x,y,z) \in D$ par $\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{V}(x,y,z) = \nabla \wedge \vec{V}(x,y,z)$.

Le symbol $\wedge$ indique le **produit vectoriel** des opérateurs de dérivation partielle $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ avec les coordonnées du champ de vecteur $\vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$.

Interprétation. Le rotationnel indique l'axe de rotation d'un champ de vecteur “tourbillonnant”.

Exemple. Soit $V(x,y,z) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix}$. *Calcul du rotationnel en cours et* simulation MATLAB.

Definition (Divergence)

Soit D une partie ouverte de $\mathbb{R}^d$ avec $d = 2$ ou 3 et $\vec{V} : D \to \mathbb{R}^d$ une application différentiable. On appelle **divergence de $\vec{V}$**, notée div $\vec{V}$, la fonction scalaire définie pour tout $M \in D$ par
$\mathrm{div}\,\vec{V}(M) = \nabla \cdot \vec{V}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ si $d = 2$ $\quad \left(= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right.$ si $d = 3$.)

Interprétation. Le signe de la divergence indique la tendance d'un champ de vecteur à “diverger à partir de” ou à “converger vers” un point M_0.

Exemple. Soit $\vec{V}(M) = \overrightarrow{OM}$. *Calcul de la divergence en cours.*

Definition (Laplacien)

Soit D une partie ouverte de $\mathbb{R}^d$ avec $d = 2$ ou 3 et $f : D \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2$. On appelle **Laplacien de f**, notée Δf, la fonction scalaire définie pour tout $M \in D$ par

$\Delta f(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ si $d = 2$ $\quad \left(= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right.$ si $d = 3$.)

On vérifiera (en ligne) que $\boxed{\Delta f = \mathrm{div}(\nabla f)}$.

Interprétation. ① Le signe $\Delta f(M_0) > 0$ indique que le graphe de f est local[t] convexe au voisinage de M_0,
② la valeur $\Delta f(M_0) = 0$ indique que le graphe de f est local[t] plat au voisinage de M_0,
③ le signe $\Delta f(M_0) < 0$ indique que le graphe de f est local[t] concave au voisinage de M_0,

$\rightarrow$ simulation MATLAB.

Propriété(s) (linéarité - MT23)

Ces opérateurs différentiels sont linéaires : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a

① $\nabla(\lambda f + \mu g) = \lambda \nabla f + \mu \nabla g$ ② $\overrightarrow{\mathrm{Rot}}(\lambda \vec{V}_1 + \mu \vec{V}_2) = \lambda\, \overrightarrow{\mathrm{Rot}}\, \vec{V}_1 + \mu\, \overrightarrow{\mathrm{Rot}}\, \vec{V}_2$

③ $\mathrm{div}(\lambda \vec{V}_1 + \mu \vec{V}_2) = \lambda\, \mathrm{div}\, \vec{V}_1 + \mu\, \mathrm{div}\, \vec{V}_2$ ④ $\Delta(\lambda f + \mu g) = \lambda \Delta f + \mu \Delta g$.

(L'algèbre linéaire vue en MT23 s'applique à ces opérateurs : valeur propre, vecteur propre, diagonalisation, etc $\cdots$)

II - Potentiel scalaire / Potentiel vecteur

$\boxed{A}$ Potentiel scalaire.

Proposition

Soit D une partie ouverte de $\mathbb{R}^3$ et $f : D \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Alors on a $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{Rot}}(\nabla f) = \vec{0}}$

Preuve. En cours.

Definition (dériver d'un potentiel scalaire)

Soit D une partie ouverte de $\mathbb{R}^d$ avec $d = 2$ ou 3 et $\vec{V} : D \to \mathbb{R}^d$ une application. On dit que $\vec{V}$ **dérive d'un potentiel scalaire** s'il existe une application f différentiable sur D telle que $\boxed{\vec{V} = \nabla f}$.

Exemple. Montrons que $\vec{V}(M) = \vec{OM}$ dérive d'un potentiel scalaire.

Theorem (C.N.S)

Soit $\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ un champ de vecteur de classe $\mathscr{C}^1$ sur $D \subset \mathbb{R}^3$. Alors

$$\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{V} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, f : D \to \mathbb{R} \text{ de classe } \mathscr{C}^2 \text{ tq } \vec{V} = \nabla f.$$

Preuve. *En cours ou à lire en fonction du temps.*

Méthodologie pour résoudre l'équation $\vec{V} = \nabla f$.

La donnée est $V(x,y,z) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$ et l'inconnue est l'expression algébrique $f(x,y,z)$

Exercice. Prenons $\vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2 \cos x \\ 2y \sin x + e^{2z} \\ 2ye^{2z} - z^2 \end{pmatrix}$.

1. vérifier que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire f.
2. déterminer f

Correction en cours.

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

Programme des TDs

Liste des exercices à effectuer dans l'ordre :

Exercice A.2.1 du poly. (1), (2) et (5) et (8) Formules très utiles en physique
Démontrer les formules en effectuant les calculs composantes par composantes. Si besoin, écrire

$$A(x,y,z) = \begin{pmatrix} A_1(x,y,z) \\ A_2(x,y,z) \\ A_3(x,y,z) \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, $fA = \begin{pmatrix} f \times A_1 \\ f \times A_2 \\ f \times A_3 \end{pmatrix}$.

NB : toutes ces formules apparaissent dans la partie cours de votre poly, mais elles ne sont pas à apprendre par cœur.

Exercice A.2.5 du poly. Questions (1) (2) et (3) uniquement. Sur les potentiels scalaires
Se référer à l'exemple du cours.

Exercice A.1.29 Gradient et Laplacien en coordonnées polaires.
Utiliser les formules de dérivation partielles de fonctions composées.

Exercice A.2.3 Questions (1a) et (1b) uniquement.