$\boxed{B}$ Potentiel vecteur.

Proposition

Soit D une partie ouverte de $\mathbb{R}^3$ et $\vec{F} : D \to \mathbb{R}^3$ une application de classe $\mathscr{C}^2$. Alors on a $\boxed{\operatorname{div}(\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{F}) = 0}$

Preuve. *Calcul en cours.*

Definition (dériver d'un potentiel vecteur)

Soit D une partie ouverte de $\mathbb{R}^3$ et $\vec{V} : D \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteur. On dit que $\vec{V}$ **dérive d'un potentiel vecteur** s'il existe un champ de vecteur $\vec{F}$ différentiable sur D tel que $\boxed{\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{F}}$.

Exemple. Vérifier que $\vec{V}(M) = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$ dérive du potentiel vecteur $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} y^2 \\ z^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$. *Vérification en cours.*

Theorem (C.N.S. admise)

Soit $\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ un champ de vecteur de classe $\mathscr{C}^1$ sur $D \subset \mathbb{R}^3$. Alors

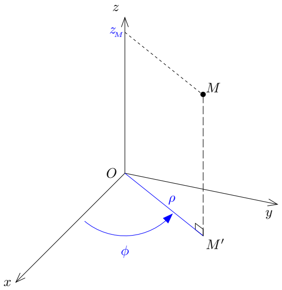
$$\operatorname{div}\vec{V} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\ \vec{F} : D \to \mathbb{R}^3 \text{ de classe } \mathscr{C}^2 \text{ tq } \vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{F}.$$

NB. Qu'en est-il de la dimension $d = 2$?

III - Calculs en coordonnées polaires/cylindriques/sphériques

$\boxed{A}$ Les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques dans l'espace $(Oxyz)$.

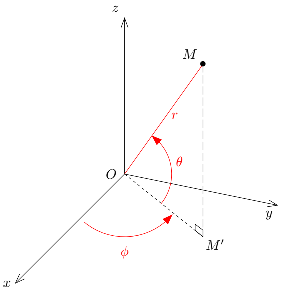
Soit $M(x_M, y_M, z_M)$ un point de l'espace $(Oxyz)$.



Les coordonnées cylindriques de M sont (ρ, ϕ, z_M)

$$\begin{cases} x_M &= OM' \cos\phi = \rho\cos\phi \\ y_M &= OM' \sin\phi = \rho\sin\phi \\ z_M & \end{cases}$$

$\rho \in [0, +\infty[$, $\phi \in [0, 2\pi[$ et $z_M \in \mathbb{R}$



Les coordonnées sphériques de M sont (r, ϕ, θ)

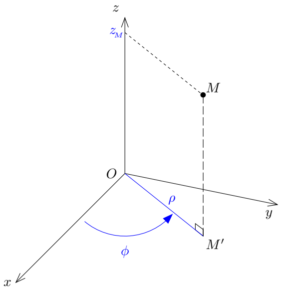
$$\begin{cases} x_M &= OM' \cos\phi = r\cos\phi\cos\theta \\ y_M &= OM' \sin\phi = r\sin\phi\cos\theta \\ z_M &= MM' = r\sin\theta \end{cases}$$

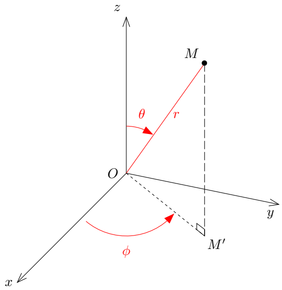
$r \in [0, +\infty[$, $\phi \in [0, 2\pi[$ et $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

III - Calculs en coordonnées polaires/cylindriques/sphériques

$\boxed{A}$ Les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques dans l'espace $(Oxyz)$.

Soit $M(x_M, y_M, z_M)$ un point de l'espace $(Oxyz)$.





Les coordonnées cylindriques de M sont (ρ, ϕ, z_M)

$$\begin{cases} x_M &= OM' \cos\phi = \rho\cos\phi \\ y_M &= OM' \sin\phi = \rho\sin\phi \\ z_M \end{cases}$$

$\rho \in [0, +\infty[$, $\phi \in [0, 2\pi[$ et $z_M \in \mathbb{R}$

Les coordonnées sphériques de M sont (r, ϕ, θ)

$$\begin{cases} x_M &= OM' \cos\phi = r\cos\phi\sin\theta \\ y_M &= OM' \sin\phi = r\sin\phi\sin\theta \\ z_M &= MM' = r\cos\theta \end{cases}$$

$r \in [0, +\infty[$, $\phi \in [0, 2\pi[$ et $\theta \in [0, \pi]$.

$\boxed{B}$ Calcul différentiel.

On rappelle que la différentielle de f est liée au gradient de f par la **formule** $\boxed{\mathbf{d}f(M) = \nabla f(M) \cdot \mathbf{d}\vec{OM}}$ $(*)$, **invariante selon le système de coordonnées** utilisé.

- <u>*En dimension 2*</u>, cela signifie que $df(M) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta$.

  On a $\vec{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{d}\vec{OM} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}$ et

  $$\vec{OM} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{d}\vec{OM} = \begin{pmatrix} \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta \\ \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta \end{pmatrix} = \mathrm{d}r \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}}_{\vec{e}_r} + \mathrm{d}\theta \underbrace{\begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}}_{r\times\vec{e}_\theta}$$

  On peut alors vérifier qu'en coord. polaires $\nabla f(M) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta$ est compatible avec $(*)$

- <u>*En dimension 3*</u>, cela signifie que pour le système de coord. cylindriques (ρ, ϕ, z) on a

  $$df(M) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \frac{\partial f}{\partial \rho}d\rho + \frac{\partial f}{\partial \phi}d\phi + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

  $$\vdots$$

  et pour le système de coord. sphériques (r, ϕ, θ) on a

  $$df(M) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \phi}d\phi + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta$$

  $$\vdots$$