Chapitre 3 - Courbes et surfaces

I - Définition d'une courbe et d'une surface

$\boxed{A}$ Les courbes du plan et les surfaces de l'espace

	Les courbes du plan (xOy)	
	Définition	**Exemples**
Équation explicite	$\mathscr{C} = \{M(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, \boldsymbol{y = g(x)} \text{ et } x \in I\}$ étant donnée $g : I \to \mathbb{R}$, où $I \subset \mathbb{R}$.	droite : $y = ax + b$ parabole : $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$
Équation implicite	$\mathscr{C} = \{M(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, \boldsymbol{f(x,y) = 0}\}$ étant donnée $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.	droite : $ax + by = c$ cercle : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

	Les surfaces de l'espace $(Oxyz)$	
	Définition	**Exemples**
Équation explicite	$\mathcal{S} = \{M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, \boldsymbol{z = g(x,y)} \text{ et } x \in D\}$ étant donnée $g : D \to \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}^2$.	plan : $z = ax + by + c$ paraboloïde : $z = x^2 + y^2$
Équation implicite	$\mathcal{S} = \{M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, \boldsymbol{f(x,y,z) = 0}\}$ étant donnée $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.	plan : $ax + by + cz = d$ sphère : $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

Remarques : ① Toute équation *explicite* se transforme en équation *implicite*.

En effet, $z = g(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad z - g(x,y) = 0.$ On pose alors $f(x,y,z) = z - g(x,y)$.

② La réciproque est fausse en général. Le *théorème des fonctions implicites* répond localement au problème. Cependant, on peut recouvrir une surface implicite d'un nombre fini de surfaces explicites

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \Leftrightarrow \underbrace{\left(z \geqslant 0 \text{ et } z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\right)}_{\text{hémisphère supérieure}} \text{ ou } \underbrace{\left(z \leqslant 0 \text{ et } z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\right)}_{\text{hémisphère inférieure}}$$

$\boxed{B}$ Les courbes de l'espace $(Oxyz)$

	Définition	Exemples
Système de 2 équations	$\mathscr{C} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ **l'intersection de deux surfaces** $= \{M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ f_1(x,y,z) = 0$ **<u>et</u>** $f_2(x,y,z) = 0\}$ étant données $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.	*une droite est l'intersection de deux plans*

→ représentation graphique (MATLAB)

II - Équations paramétriques

$\boxed{A}$ Les courbes du plan et de l'espace

	Paramétrisation	**Exemples**
Les courbes du plan	$M(x,y) \in \mathscr{C} \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in I, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix}$ où I est un intervalle à déterminer de sorte à ne parcourir qu'une et une seule fois la courbe.	*exemples 1 et 2 ci-dessous*
Les courbes de l'espace	$M(x,y,z) \in \mathscr{C} \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in I, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \phi_3(t) \end{pmatrix}$	*exemples 3 et 4 ci-dessous*

Exemple 1 : *Les courbes représentatives de fonctions* $\mathscr{C} = \{M(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ y = g(x) \text{ et } x \in I\}$.

$$\vdots$$

Exemple 2 : *Les cercles du plan* $\mathscr{C} = \{M(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2\}$, avec $R > 0$ donné.

$$\vdots$$

Exemple 3 : Une hélice $\quad \rightarrow$ voir graphique

$$M(x,y,z) \in \mathscr{C} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, t \in I,\ M = \Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}.$$

Exemple 4 : Une droite $\mathscr{D}$ de l'espace passant par les points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$
Alors,

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in \mathscr{D} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} // \overrightarrow{AB} \quad & \Leftrightarrow \quad \exists\, t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \\ & \Leftrightarrow \quad \exists\, t \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t(x_B - x_A) \\ t(y_B - y_A) \\ t(z_B - z_A) \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \exists\, t \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A + t(x_B - x_A) \\ y_A + t(y_B - y_A) \\ z_A + t(z_B - z_A) \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \boxed{\exists\, t \in \mathbb{R},\ M = (1-t)A + tB}\,. \end{aligned}$$

De plus, si $M \in [AB]$ alors $t \in [0,1]$.

$\boxed{B}$ Les surfaces de l'espace $(Oxyz)$

$\rightarrow$ Il s'agit de définir/décrire la distribution des points M d'une surface $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ à l'aide de deux variables.

	Paramétrisation
Les surfaces de l'espace	$M(x,y,z) \in S \quad \Leftrightarrow \quad \exists (u,v) \in D,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(u,v) = \begin{pmatrix} \phi_1(u,v) \\ \phi_2(u,v) \\ \phi_3(u,v) \end{pmatrix}$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est à déterminer de sorte que $\Phi : D \rightarrow \mathcal{S}$ soit bijective.

Exemple 1 : *Les graphes de fonctions de 2 variables* $\mathcal{S} = \{M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, ; \; z = g(x, y) \text{ et } (x, y) \in D\}$.

$$\vdots$$

Exemple 2 : *Les cylindres de révolution* $\mathcal{S} = \{M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, ; \; x^2 + y^2 = R^2\}$, avec $R > 0$ donné.

$$\vdots$$

Exemple 3 : *Les sphères* $\mathcal{S} = \{M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, ; \; x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$, avec $R > 0$ donné.

$$\vdots$$

$\rightarrow$ voir graphiques

Exercice : Soit P un plan passant par $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ et engendré par 2 vecteurs $\vec{a} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ non colinéaires. Déterminer les équations paramétriques de P.

Correction. *en cours*

$$\vdots$$

III - Quelques géométries élémentaires

$\boxed{A}$ Coniques du plan

graphiques sur Moodle

$\boxed{B}$ Les quadriques de l'espace

graphiques sur Moodle

Programme des TDs

Liste des exercices à effectuer dans l'ordre :

A.2.7 questions (1) et (2) du chapitre 2

Chapitre 3 :

Exercice A.2.1 du poly. (2), (3) et (4) et (6) Sur les courbes du plan.
Il faut représenter graphiquement la partie $\mathscr{D}$ pour en déduire son bord (càd sa frontière). Il faudra sans doute diviser le bord en plusieurs morceaux pour le paramétrer.
Exemple avec la question (1) : Le domaine $\mathscr{D} = \{M(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| < 1 \text{ et } |y| < 1\}$ est l'intérieur d'un carré. En effet, $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ et $|y| < 1 \Leftrightarrow -1 < y < 1$. Le bord est alors composé de 4 segments qui se paramétrisent séparément comme suit

$$\text{Le côté du carré positionné sur } (y=-1) \text{ se paramétrise par } M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(t) = \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } t \in [-1,1].$$

$$\text{Le côté du carré positionné sur } (x=1) \text{ se paramétrise par } M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \text{ et } t \in [-1,1].$$

$$\vdots$$

etc (à compléter)

Exercice A.2.7 du poly. Sur les courbes de l'espace.

Exercice A.2.5 du poly. Révisions de géométries dans l'espace.
Suite de l'exemple du cours sur les équations paramétriques d'un plan.