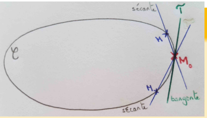
IV - Étude locale d'une courbe ou d'une surface **paramétrée**

$\boxed{A}$ Droite tangente à une courbe de $\mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3

Definition (droite tangente)

Soit $\mathscr{C}$ une courbe de $\mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3, et $M_0 \in \mathscr{C}$. On dit que $\mathscr{C}$ admet une **tangente** en M_0 ssi les sécantes (MM_0), $M \in \mathscr{C}$, admettent une unique position limite quand $M \to M_0$.



Theorem

*On suppose que $\mathscr{C}$ est paramétrée par une application $\Phi : t \in I \mapsto \Phi(t) \in \mathbb{R}^d$ dérivable. Soit $M_0 \in \mathscr{C}$ et $t_0 \in I$ tel que $M_0 = \Phi(t_0)$. On suppose $\boxed{\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{t_0}) \neq \vec{\mathbf{0}}}$. Alors $\mathscr{C}$ **admet une droite tangente en** M_0 d'équation paramétrique $\boxed{\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M_0} + \boldsymbol{\lambda\Phi}'(\boldsymbol{t_0}),\ \lambda \in \mathbb{R}}$. Le vecteur $\vec{v}_0 = \boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{t_0})$ est appelé **vecteur tangent à** $\mathscr{C}$ **en** M_0.*

preuve. *en cours*

Exemple 1. Considérons la courbe $\mathscr{C}_g$ de $\mathbb{R}^2$ définie par une équation explicite $y = g(x)$, avec $x \in I$.

- On sait qu'une paramétrisation de $\mathscr{C}_g$ est $\Phi(t) = \begin{pmatrix} t \\ g(t) \end{pmatrix}$, $t \in I$.
- Si la fonction g est dérivable sur I alors $\mathscr{C}_g$ admet en tout point $M_0(x_0, g(x_0))$, avec $x_0 \in I$, une droite tangente d'équations paramétriques $M = M_0 + \lambda \Phi'(x_0) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ g(x_0) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ g'(x_0) \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- La première équation donne $\lambda = x - x_0$.
- Par substitution dans la seconde équation, on retrouve $\boxed{y = g(x_0) + (x - x_0) g'(x_0)}$.

Exemple 2. Considérons l'ellipse $\mathscr{C}$ d'équation implicite $\frac{x^2}{4} + (y+1)^2 = 1$.
Paramétrer la courbe $\mathscr{C}$. En déduire les équations paramétriques de sa droite tangente en $M_0(\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$.

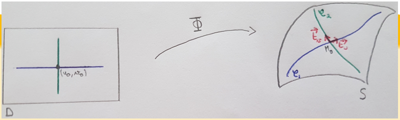
Correction. *en cours.*

$\vdots$

$\boxed{B}$ Plan tangent à une surface de $\mathbb{R}^3$

Definition (plan tangent)

Soit S une surface et $M_0 \in S$. Le **plan tangent** à S en M_0, lorsqu'il existe, est le plan contenant toutes les droites tangentes aux courbes $\mathscr{C} \subset S$ passant par M_0.



Theorem

Soit S une surface paramétrée par $\Phi : (u, v) \in D \mapsto \Phi(u, v) \in \mathbb{R}^3$ avec $D \subset \mathbb{R}^2$.
Soit $M_0 \in S$ et $(u_0, v_0) \in D$ tel que $M_0 = \Phi(u_0, v_0)$.
On suppose Φ différentiable en (u_0, v_0) et telle que $\boxed{\vec{t}_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0, v_0) \text{ et } \vec{t}_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0)}$ *soient* ***non colinéaires****. Alors* ***la surface S admet un plan tangent en M_0 engendré par les vecteurs tangents $\vec{t}_u$ et $\vec{t}_v$****.*

preuve. *en cours*

Corollaire (cf ex. A.2.5)

Avec les mêmes notations et hypothèses, une ***équation implicite du plan tangent*** *à S en $M_0 = \Phi(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ est*

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)} = 0 \quad \text{où} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0) \neq \vec{0}.$$

Exemple. Soit S le cône définit par $(x-1)^2 + y^2 = 2z^2$.
Donner une paramétrisation de S et déterminer le plan tangent à S au point $M_0(0, 1, 1)$.

Correction. *en cours*

$\vdots$

V - Étude locale d'une courbe ou d'une surface **implicite**

A Droite tangente à une courbe de $\mathbb{R}^2$

Theorem

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable et $\mathscr{C}$ la courbe définie par $\mathscr{C} = \{M(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; f(x,y) = 0\}$.

Alors, en tout point $M_0(x_0, y_0) \in \mathscr{C}$, le vecteur $\boxed{\vec{N}_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \nabla f(x_0, y_0)}$ est ***orthogonal (ou normal) à la tangente à $\mathscr{C}$ en M_0****. Dans ce cas, l'équation de la tangente est $\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0}$.*

preuve.

Exemple. Considérons l'ellipse $\mathscr{C}$ d'équation implicite $\frac{x^2}{4} + (y+1)^2 = 1$.
Déterminer une équation de la droite tangente en $M_0(\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$.

Correction. *en cours*

$\boxed{B}$ Plan tangent à une surface de $\mathbb{R}^3$

Theorem (cf ex. A.2.5)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable et S la surface définie par $S = \{M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; f(x,y,z) = 0\}$.

Alors, en tout point $M_0 \in S$, le vecteur $\boxed{\vec{N}_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \nabla f(M_0)}$ est ***orthogonal (ou normal) au plan tangent à S en M_0****. Dans ce cas, l'équation du plan tangent est $\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}$.*

preuve. *Similaire à la dimension 2.*

Exemple. Soit S le paraboloïde d'équation $z + 1 = \frac{x^2}{2} + y^2$.
Déterminer l'équation implicite du plan tangent à S en tout point $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Correction. *en cours*

$\vdots$