Chapitre 4 - Intégrale double

Introduction : Premiers exemples

Proposition (intégrer sur un rectangle)

Soit f une application continue sur $D = [a, b] \times [c, d]$, avec $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$.
Alors, $\displaystyle\iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy.$

Exemple 1 : $D = [0, 1] \times [0, 2]$ et $f(x, y) = x^2 + y^2$.

$\vdots$

Exemple 2 : Cas des fonctions à variables séparées $f(x, y) = g(x)k(y)$.

$\vdots$

Proposition (calcul d'aire entre deux courbes représentatives)

Soient φ_1 et φ_2 deux fonctions définies et continues sur un même intervalle $[a, b]$, $a < b$ et telles que $\forall\, t \in [a, b],\ \varphi_1(t) \leqslant \varphi_2(t)$. On définit $\boxed{\boldsymbol{D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ a \leqslant x \leqslant b\ \text{ et }\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}}}$.

Alors $\displaystyle Aire(D) = \int_a^b (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} 1\, dy \right) dx$

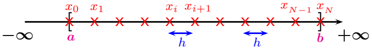
I - Intégrale double au sens de Riemann

A Domaine quarrable du plan (xOy)

Rappel : Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, avec $(a < b)$, et $N \in \mathbb{N}^*$. On peut découper cet intervalle en N sous-intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ pour $i = 1, \ldots, N$ tels que $[a, b] = \bigcup_{i=1}^{N} [x_{i-1}, x_i]$ et $a = x_0 < \cdots < x_i < \cdots < x_N = b$.

L'ensemble $\{x_0; \ldots; x_N\}$ est appelé **subdivision** de $[a, b]$. On peut la choisir **régulière** de pas constant $\boxed{x_{i+1} - x_i = h = \frac{b-a}{N}}$

Ainsi, $x_0 = a, \cdots, x_i = a + ih, \cdots$ et $x_N = a + Nh = b$.



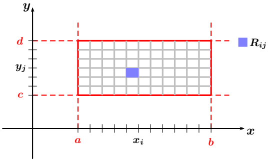
Definition (① quadrillage d'un rectangle)

Soit $[a, b] \times [c, d]$ un rectangle avec $a < b$ et $c < d$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathbb{N}^*$.
On note $\{x_0, \cdots, x_N\}$ et $\{y_0, \cdots, y_M\}$ les subdivisions régulières des segments $[a, b]$ et $[c, d]$.
La réunion des rectangles $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ est appelée **quadrillage** du rectangle $[a, b] \times [c, d]$.

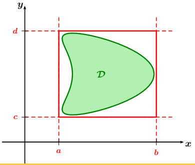
Definition (② partie bornée de $\mathbb{R}^2$)

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que D est **bornée** s'il existe un rectangle $[a, b] \times [c, d]$ contenant D.

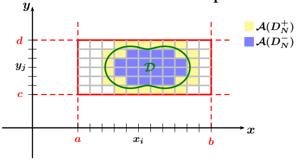
①



②



Notations : Soit D une partie bornée de $\mathbb{R}^2$ telle que $D \subset [a, b] \times [c, d]$. On fixe $N = M \in \mathbb{N}^*$ et on note



$$I_N^- := \{(i,j) \in [\![1, N]\!]^2 \ ; \ R_{ij} \subset D\}, \qquad \text{puis } D_N^- = \bigcup_{(i,j)\in I_N^-} R_{ij}$$

$$I_N^+ := \{(i,j) \in [\![1, N]\!]^2 \ ; \ R_{ij} \cap D \neq \varnothing\}, \qquad \text{puis } D_N^+ = \bigcup_{(i,j)\in I_N^+} R_{ij}$$

Enfin, on note $\mathcal{A}(D_N^-)$ et $\mathcal{A}(D_N^+)$ les aires respectives de D_N^- et D_N^+.

On a $$\mathcal{A}(D_N^-) = \frac{(b-a)(d-c)}{N^2} \times \operatorname{card}(I_N^-) \leqslant \mathcal{A}(D) \leqslant \mathcal{A}(D_N^+) = \frac{(b-a)(d-c)}{N^2} \times \operatorname{card}(I_N^+).$$

Definition (Partie quarrable de $\mathbb{R}^2$)

On dit que D est **quarrable** ssi $\boldsymbol{\exists \ell \in \mathbb{R}, \ \lim_{N\to\infty} \mathcal{A}(D_N^-) = \lim_{N\to\infty} \mathcal{A}(D_N^+) = \ell.}$

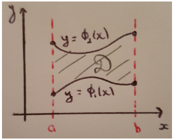
Dans ce cas, on définit **l'aire de D** comme étant la limite commune : $\boldsymbol{\mathcal{A}(D) = \ell}$.

Exemples : • Tout rectangle $[a, b] \times [c, d]$ est quarrable ($D_N^- = D_N^+ = D$).

• Toute partie de $\mathbb{R}^2$ délimitée par des courbes explicites continues comme suit

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ a \leqslant x \leqslant b \ \text{ et } \ \phi_1(x) \leqslant y \leqslant \phi_2(x)\} \text{ sont quarrables.}$$

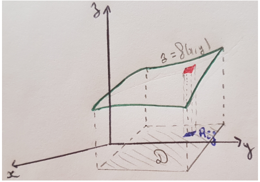
• Toute partie bornée de $\mathbb{R}^2$ dont la frontière est une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^1$ est quarrable (cercle, ellipse, etc. . .).



$\boxed{B}$ Intégrale double d'une fonction de deux variables $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$

Rappel MT02 : intégrabilité des fonctions d'une variable réelle sur $[a,b]$, $a < b$.

Cas des fonctions de deux variables :



Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une application avec D quarrable. On suppose $D \subset [a,b] \times [c,d]$ et on prolonge f en une fonction définie sur $[a,b] \times [c,d]$ par

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in D \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin D. \end{cases}$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $\{x_0, \ldots, x_N\}$ et $\{y_0, \ldots, y_N\}$ deux subdivisions régulières de $[a,b]$ et $[c,d]$. Pour $i,j = 1, \ldots, N$, on pose

$$u_{ij} = \inf\{\tilde{f}(x,y)\ ;\ (x,y) \in R_{ij}\} \quad \text{et} \quad U_{ij} = \sup\{\tilde{f}(x,y)\ ;\ (x,y) \in R_{ij}\}$$

$$S_N^- = \frac{(b-a)(d-c)}{N^2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} u_{i,j} \qquad S_N^+ = \frac{(b-a)(d-c)}{N^2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} U_{ij}$$

Remarque : $\frac{(b-a)(d-c)}{N^2} \times u_{ij} =$ volume du parallélépipède de base R_{ij} et de hauteur u_{ij}.

Definition (intégrale double)

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une application avec D quarrable. On suppose qu' $\exists\, \boldsymbol{\ell} \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{N\to\infty} S_N^- = \lim_{N\to\infty} S_N^+ = \boldsymbol{\ell}$.

Alors f est dite **intégrable sur D**. On définit la valeur de l'intégrale double de f sur D comme étant la limite commune : $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy = \ell$.

Exemple 1 : Soit D une partie quarrable de $\mathbb{R}^2$ et $f : (x, y) \in D \mapsto 1$. Montrons que $\boxed{\displaystyle\iint_D 1\, dxdy = \mathcal{A}(D)}$

Correction. *en cours.*

$$\vdots$$

Exemple 2 : Soit D le disque unité et $f : (x, y) \in D \mapsto c$ avec $c \in \mathbb{R}$.
Montrer que f est intégrable sur D. Que représente le nombre $\displaystyle\iint_D f(x, y)\, dxdy$?

Correction. *en cours.*

$$\vdots$$

Theorem (admis)

Toute application continue et bornée $f : D \to \mathbb{R}$ avec D quarrable est intégrable sur D.

Interprétation géométrique : Le nombre $\displaystyle\iint_D f(x, y)\, dxdy$ est le **volume signé** du solide de l'espace délimité par la surface $D \subset (xOy)$ et le graphe d'équation $\boldsymbol{z = f(x, y)}$.