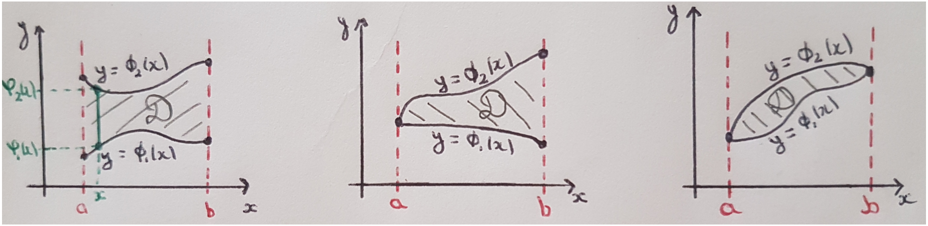
# *II* - Quelques règles de calculs : intégrales simples successives

## $\boxed{B}$ Domaine non rectangulaire

**Theorem (1ère formule de Fubini)**

*Soient $\varphi_1$ et $\varphi_2$ deux fonctions définies et continues sur un même intervalle $[a,b]$, $a<b$ et telles que $\forall\, t \in [a,b],\ \varphi_1(t) \leqslant \varphi_2(t)$. On définit* $\boxed{\boldsymbol{D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ a \leqslant x \leqslant b \ \ \textit{et}\ \ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}}}$.

*Alors $D$ est quarrable et pour toute fonction $f$ intégrable sur $D$, on a* $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$



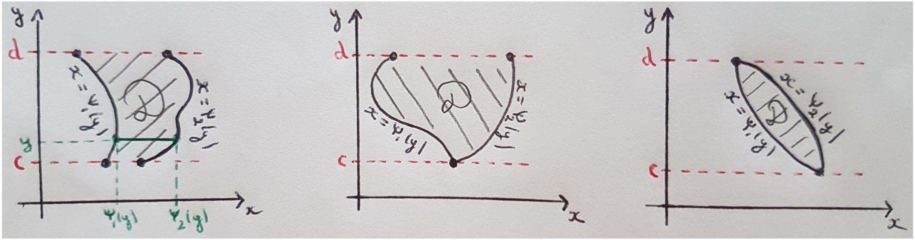

**Exercice** : Déterminer le volume du tétraèdre délimité par les demi-plans d'inéquations

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0 \quad \text{et} \quad x+y+z \leqslant 1.$$

**Theorem (2ème formule de Fubini)**

*Soient $\psi_1$ et $\psi_2$ deux fonctions définies et continues sur un même intervalle $[c,d]$, $c<d$ et telles que $\forall\, t \in [c,d],\ \psi_1(t) \leqslant \psi_2(t)$. On définit* $\boxed{\boldsymbol{D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ c \leqslant y \leqslant d \ \ \text{et}\ \ \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\}}}$.

*Alors $D$ est quarrable et pour toute fonction $f$ intégrable sur $D$, on a* $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left( \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$




**Exercice** : On reprend le calcul du volume du tétraèdre délimité par les demi-plans d'inéquations

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0 \quad \text{et} \quad x+y+z \leqslant 1.$$

## C Quelques propriétés

**Convention** : Si $D = \varnothing$ alors $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy = 0$.

### Proposition (linéarité et ordre)

*Soient $f$ et $g$ deux applications intégrables sur une partie quarrable $D$ de $\mathbb{R}^2$. Alors*

① $\forall\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ , $(\lambda f + \mu g)$ *est intégrable et* $\displaystyle\iint_D (\lambda f + \mu g)(x,y)\,dxdy = \lambda \iint_D f(x,y)\,dxdy + \mu \iint_D g(x,y)\,dxdy.$

② $\displaystyle\left(\forall\,(x,y) \in D,\ f(x,y) \leqslant g(x,y)\right) \quad \Rightarrow \quad \iint_D f(x,y)\,dxdy \leqslant \iint_D g(x,y)\,dxdy.$

### Corollaire

*Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ tel que $\mathcal{A}(D) = 0$. Si $f$ est définie et bornée sur $D$ alors $f$ est intégrable et* $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy = 0.$

### Proposition (Relation de Chasles)

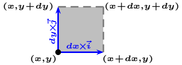
① *Si $D = D_1 \cup D_2$ avec $D_1 \cap D_2 = \varnothing$ alors* $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy.$

② *Cas général : Si $D = D_1 \cup D_2$ alors* $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy - \iint_{D_1 \cap D_2} f(x,y)\,dxdy.$

# *III* - Changement de variables

**Remarque :** • Soit $ABCD$ un parallélogramme dans le plan de repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Étant données les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}\binom{u_1}{v_1}$ et $\overrightarrow{AD}\binom{u_2}{v_2}$, on a $\mathcal{A}ire(ABCD) = \left|\det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2\end{pmatrix}\right| = |u_1v_2 - v_1u_2|$ (cf MT23).

• Si on considère le rectangle infinitésimal



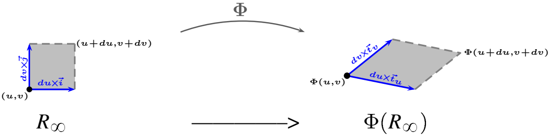

alors $\mathcal{A}ire(R_\infty) = \left|\det\begin{pmatrix} dx & 0 \\ 0 & dy\end{pmatrix}\right| = dxdy.$

## Definition

Soient $D$ et $\Delta$ deux parties quarrables de $\mathbb{R}^2$. On appelle **changement de variable** de $\Delta$ sur $D$, toute application $\Phi : (u,v) \in \Delta \mapsto \Phi(u,v) \in D$ telle que :

1. $\Phi$ est bijective
2. $\Phi$ et $\Phi^{-1}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$.

Si $\Phi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ alors $\Phi(u+du, v+dv) = \Phi(u,v) + \underbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial u}(u,v)}_{\vec{t}_u} \times du + \underbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial v}(u,v)}_{\vec{t}_v} \times dv + \underbrace{||(du,dv)||\varepsilon(du,dv)}_{\text{reste négligeable}}$



## Definition (jacobien)

Soit $\Delta$ une partie quarrable de $\mathbb{R}^2$ et $\Phi : \Delta \to \mathbb{R}^2$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ de composantes $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}$.

On appelle **jacobien** de $\Phi$, la quantité définie par $J_\Phi = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \times \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}$.

## Theorem

*Soient $D$ et $\Delta$ deux parties quarrables de $\mathbb{R}^2$ et* ***$\Phi$ un changement de variable de $\Delta$ sur $D$*** *tel que $\forall (u,v) \in \Delta,\ J_\Phi(u,v) \neq 0$. Alors pour toute application $f$ intégrable sur $D$, on a*

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_\Delta f \circ \Phi(u,v)\ \left|J_\Phi(u,v)\right|\ dudv}.$$

**Remarque** : $\left|J_\Phi(u,v)\right|\ dudv$ correspond à l'aire de $\Phi(R_\infty)$ qui prend la forme d'un parallélogramme :

$$\mathcal{A}ire\big(\Phi(R_\infty)\big) = \left|\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \times du & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \times dv \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} \times du & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \times dv \end{pmatrix}\right| = \left|\frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \times dudv - \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \times \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} \times dudv\right| = \left|J_\Phi(u,v)\right|\ dudv$$

**Exemple** : Déterminer l'aire de la surface délimitée par une ellipse de rayons $a$ sur $(Ox)$ et $b$ sur $(Oy)$

$$\mathscr{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}.$$

**Correction.** *en cours*

$$\vdots$$

**Exercice**. Calculer $I = \iint_D (x^2 + y^2) dxdy$ où $\quad D_1 \backslash D_2 \quad$ avec

$$\mathscr{D}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x^2 + y^2 \leqslant 4 \text{ et } y \geqslant 0\} \quad \text{et} \quad \mathscr{D}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x^2 + (y-1)^2 < 1 \text{ et } x > 0\}.$$

**Correction.** *en cours*

$$\vdots$$