Chapitre 5 - Intégrale triple

I - Intégrale triple au sens de Riemann

On définit une intégrale triple de la même façon qu'une intégrale double en remplaçant les « quadrillages 2D » par un « maillage 3D » (ou discrétisation 3D) des parallélépipèdes rectangles $[a, b] \times [c, d] \times [h_1, h_2]$: pour $N \in \mathbb{N}^*$ fixé, un maillage est

$$\bigcup_{i,j,k=1}^{N} P_{ijk} \ , \qquad \text{où } P_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

$$\text{et } x_i = a + i\tfrac{b-a}{N},\ y_j = c + j\tfrac{d-c}{N},\ z_k = h_1 + k\tfrac{h_2-h_1}{N}$$

$$\begin{array}{ccc} D \text{ quarrable} & \xrightarrow{\text{devient}} & \Omega \text{ cubable} \\ \text{Aire } \mathcal{A}(D) & \longrightarrow & \text{Volume } \mathcal{V}(\Omega) \\ \text{Intégrale double } \displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy & \longrightarrow & \text{Intégrale triple } \displaystyle\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz \end{array}$$

Théorème admis : Toute application $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continue et bornée est intégrable sur Ω.

Exemple à connaitre : Soit Ω une partie cubable de $\mathbb{R}^3$ et $f : (x, y, z) \in \Omega \mapsto 1$. On montre que

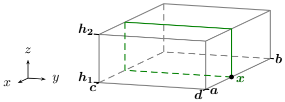
$$\boxed{\iiint_\Omega f(x,y,y)\,dxdydz = \iiint_\Omega 1\,dxdydz = \mathcal{V}(\Omega)}$$

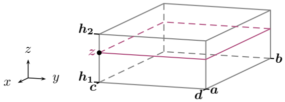
II - Quelques règles de calculs : intégrales simples successives

A Cas des parallélépipèdes rectangles $\Omega = [a,b] \times [c,d] \times [h_1,h_2]$

Proposition

Soit f une application continue sur $\Omega = [a,b] \times [c,d] \times [h_1,h_2]$, avec $a \leqslant b$, $c \leqslant d$ et $h_1 \leqslant h_2$.
Alors, $\displaystyle\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_{h_1}^{h_2} f(x,y,z)\,dz\right) dy\right) dx = \int_{h_1}^{h_2} \left(\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y,z)\,dy\right) dx\right) dz\,.$





Proposition (produit de fonctions à variables séparées)

Soit $f : [a,b] \times [c,d] \times [h_1,h_2] \to \mathbb{R}$ une application définie par $f(x,y,z) = h(x)g(y)\ell(z)$ où h, g et ℓ sont continues sur $[a,b]$, $[c,d]$ et $[h_1,h_2]$ respectivement. Alors

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = \left(\int_a^b h(x)\,dx\right) \times \left(\int_c^d g(y)\,dy\right) \times \left(\int_{h_1}^{h_2} \ell(z)\,dz\right).$$

Exemple : $\Omega = [0,1]^3$ et $f(x,y,z) = x + y + z$.
Correction en ligne.

$\vdots$

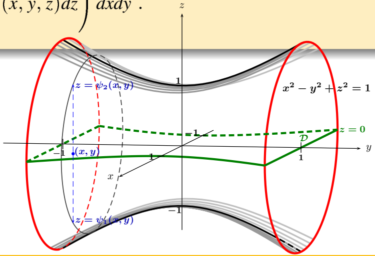
B Méthode des bâtons

Theorem (formule de Fubini partielle)

On suppose qu'il existe deux fonctions ψ_1 et ψ_2 continues sur un domaine D quarrable et telles que $\forall (x,y) \in D\ ,\ \psi_1(x,y) \leqslant \psi_2(x,y)$. On pose $\boxed{\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| (x,y) \in D \text{ et } \psi_1(x,y) \leqslant z \leqslant \psi_2(x,y)\right\}}$.
Alors Ω est cubable et pour toute fonction f intégrable sur Ω on a

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\, dxdydz = \iint\limits_{D} \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy\ .$$

Illustration : volume délimité par l'hyperboloïde d'axe (Oy) d'équation $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ et par $|y| \leqslant 1$.



Theorem (formule de Fubini totale)

Ensuite on applique l'une ou l'autre des formules de Fubini du chap. 4 au domaine D.

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ a \leqslant x \leqslant b \ \text{ et }\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\} \ \Rightarrow\ \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\, dxdydz = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx$$

Exercice : Calculer $\displaystyle\iiint_{\Omega} x^2 + y^2 \, dxdydz$ avec $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 1\}$.

Correction en ligne.

$$\vdots$$

C Méthode des tranches

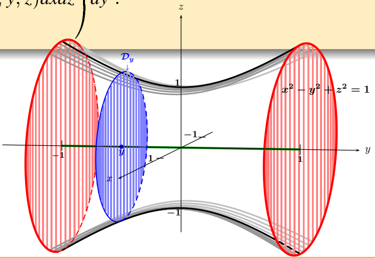
Theorem (formule de Fubini partielle)

Soit Ω une partie cubable de $\mathbb{R}^3$. On suppose qu'il existe deux constantes c et d dans $\mathbb{R}$ avec $c \leqslant d$ telles que $\forall\, M(x,y,z) \in \Omega\ ,\ c \leqslant y \leqslant d$. Dans ce cas on pose $D_{y_0} = \Omega \cap \{y = y_0\}$.

Alors $\boxed{\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| c \leqslant y \leqslant d \text{ et } (x,z) \in D_y\right\}}$ *et pour toute fonction f intégrable sur Ω on a*

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = \int_c^d \left(\iint_{D_y} f(x,y,z)dxdz \right) dy\ .$$

Illustration : volume délimité par l'hyperboloïde d'axe (Oy) d'équation $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ et par $|y| \leqslant 1$.



Theorem (formule de Fubini totale)

Ensuite on applique l'une ou l'autre des formules de Fubini du chap. 4 au domaine D_y.

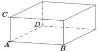
$$D_y := \{(x,z) \in \mathbb{R}^2\ ;\ a(y) \leqslant x \leqslant b(y)\ \text{ et }\ h_1(x,y) \leqslant z \leqslant h_2(x,y)\} \Rightarrow \iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dx \right) dy$$

Exercice : Calculer $\iiint\limits_{\Omega} x^2 + y^2 \, dxdydz$ avec $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 1\}$.

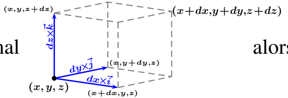
Correction en ligne.

$$\vdots$$

III - Changement de variables

Remarque : • Soit P : 

un parallélépipède dans le plan de repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Étant données les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}\begin{pmatrix}u_1\\v_1\\w_1\end{pmatrix}$, $\vec{AC}\begin{pmatrix}u_2\\v_2\\w_2\end{pmatrix}$ et $\vec{AD}\begin{pmatrix}u_3\\v_3\\w_3\end{pmatrix}$, on a $\mathcal{V}olume(P) = \left|\det\begin{pmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\v_1 & v_2 & v_3\\w_1 & w_2 & w_3\end{pmatrix}\right| = \left|\underbrace{\vec{AB}\cdot(\vec{AC}\wedge\vec{AD})}_{\text{produit mixte}}\right|$.

• Si on considère le pavé infinitésimal 

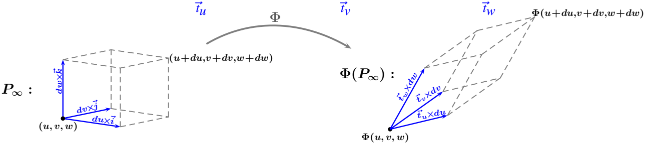
alors $\mathcal{V}olume(P_\infty) = \left|\det\begin{pmatrix}dx & 0 & 0\\0 & dy & 0\\0 & 0 & dz\end{pmatrix}\right| = dxdydz.$

Definition

Soient Ω et Δ deux parties cubables de $\mathbb{R}^3$. On appelle changement de variable de Δ sur Ω, toute application $\Phi : (u, v, w) \in \Delta \mapsto \Phi(u, v, w) \in \Omega$ telle que :

1. Φ est bijective
2. Φ et Φ^{-1} sont de classe $\mathscr{C}^1$.

$$\Phi(u+du, v+dv, w+dw) = \Phi(u,v,w) + \underbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial u}(u,v,w)}_{\vec{t}_u} \times du + \underbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial v}(u,v,w)}_{\vec{t}_v} \times dv + \underbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial w}(u,v,w)}_{\vec{t}_w} \times dw + \underbrace{||(du,dv,dw)||\varepsilon(du,dv,dw)}_{\text{reste négligeable}}$$



Definition (jacobien)

Soit Δ une partie cubable de $\mathbb{R}^3$ et $\Phi : \Delta \to \mathbb{R}^3$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ de composantes $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix}$.

On appelle **jacobien** de Φ, la quantité définie par $J_\Phi = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial w} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial w} \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial w} \end{pmatrix} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial w} \right)$.

Theorem

Soient Ω et Δ deux parties cubables de $\mathbb{R}^3$ et Φ un changement de variable de Δ sur Ω tel que $\forall\, (u, v, w) \in \Delta,\ J_\Phi(u, v, w) \neq 0$. Alors pour toute application f intégrable sur Ω, on a

$$\boxed{\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint\limits_{\Delta} f \circ \Phi(u, v, w)\, \left| J_\Phi(u, v, w) \right|\, dudvdw}.$$

Remarque : $\left| J_\Phi(u, v, w) \right|\, dudvdw$ correspond au volume de $\Phi(P_\infty)$ qui prend la forme d'un parallélépipède.