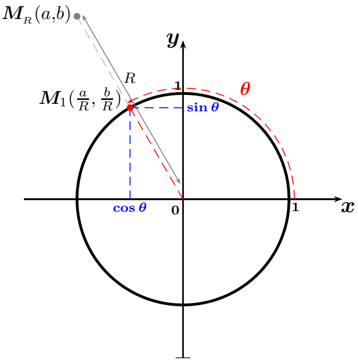
Révisions de trigonométrie, géométrie plane et calcul de fonctions dérivées et primitives

I Trigonométrie

Soit $M_R(a,b)$ un point du plan de repère orthonormé direct (O,I,J), situé à une distance $OM_R = R > 0$ par rapport à l'origine. Dans ce cas $R = \sqrt{a^2+b^2}$.



Le point M_1 de coordonnées $\left(\frac{a}{R}, \frac{b}{R}\right)$ est positionné sur le cercle trigonométrique :

$$OM_1 = \sqrt{\left(\frac{a}{R}\right)^2 + \left(\frac{b}{R}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{R^2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{R} = 1.$$

Soit $\theta = \widehat{IM_1} \in [0, 2\pi[$, la longueur de l'arc de cercle allant du point $I(1,0)$ au point M_1. On appelle

(i) **cosinus** de θ, noté $\cos\theta$, l'abscisse du point M_1,

(ii) **sinus** de θ, noté $\sin\theta$, l'ordonnée du point M_1.

Par conséquent, $\quad \frac{a}{R} = \cos\theta \quad$ et $\frac{b}{R} = \sin\theta$.

Par enroulement de la droite réelle, on a

$$\cos(2\pi+\theta) = \cos\theta \quad \text{et} \quad \sin(2\pi+\theta) = \sin\theta.$$

Definition

Pour tout point $M(a,b)$ distinct de l'origine O du repère, il existe une mesure d'angle en radian $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}$, définie modulo 2π, telle que $a = R\cos\theta$ et $b = R\sin\theta$. Cette écriture est appelée **coordonnées polaires** du point M.

Parité de *cosinus* et *sinus*. Soit M_1' le symétrique du point M_1 par rapport à l'axe des abscisses. On trouve sa position en parcourant la longueur d'arc $\widehat{IM_1}$ dans le sens indirect, soit $-\widehat{IM_1} = -\theta$.

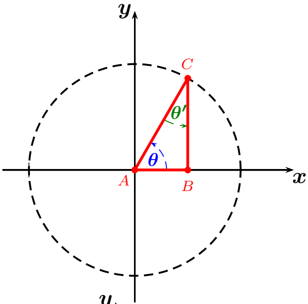
(i) Les points M_1 et M_1' ont la même abscisse, donc $\boxed{\cos(-\theta) = \cos\theta}$.

(ii) Les points M_1 et M_1' ont leur ordonnée de signe opposé, donc $\boxed{\sin(-\theta) = -\sin\theta}$.

Rappel des valeurs usuelles.

$\widehat{IOM}$	0°	30°	45°	60°	90°
$\theta = \widehat{IM}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\widehat{IOM}$ $\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\widehat{IOM}$ $\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Trigonométrie dans un triangle rectangle. D'après le théorème de Pythagore, on a $\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$.



Soit ABC un triangle rectangle en B et d'hypothénuse AC.

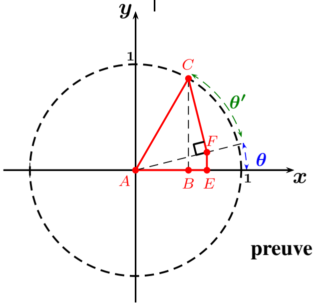
(i) Soit θ une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ en radian, alors

$$AB = AC \times \cos\theta \text{ et } BC = AC \times \sin\theta.$$

(ii) La somme des angles d'un triangle est égale à π : $\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$. On peut aussi écrire

$$BC = AC \times \cos\theta' \text{ et } AB = AC \times \sin\theta'.$$

D'où $\boxed{\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin(\theta)}$ et $\boxed{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos(\theta)}$.



Les formules d'additivité.

(i) $\cos(\theta + \theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'$.

(ii) $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$.

(iii) $\sin(\theta + \theta') = \cos\theta\sin\theta' + \cos\theta'\sin\theta$.

(iv) $\sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta$.

preuve : $\cos(\theta + \theta') = AB = AE - BE = \underbrace{\frac{AE}{AF}}_{\cos\theta} \times \underbrace{\frac{AF}{AC}}_{\cos\theta'} - \underbrace{\frac{BE}{CF}}_{\sin\theta} \times \underbrace{\frac{CF}{AC}}_{\sin\theta'}$

II Calcul vectoriel dans le plan

Definition

On munit le plan du repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soit $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points distincts du plan. On appelle **vecteur** $\overrightarrow{AB}$, la distance orientée (ou le déplacement) qui sépare le point de départ A du point d'arrivée B. Cette quantité possède à la fois

1. une grandeur : la longeur du déplacement $AB = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$,
2. une direction : la droite (AB),
3. un sens : de A vers B.

Les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$ se calculent comme suit

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

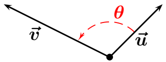
L'écriture $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{i} + y\vec{j}$ indique un déplacement horizontal d'une distance (signée) x suivi d'un déplacement vertical d'une distance (signée) y.

On note $\vec{0}$ le déplacement nul, càd $x = y = 0$.

Colinéarité. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

Produit scalaire de deux vecteurs. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Alors le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est défini par $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2}$.



Exercice : Montrons que $\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||\cos\theta$.

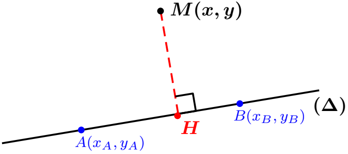
On en déduit que si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2} \bmod \pi \quad \Leftrightarrow$ Les directions portées par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires.

De plus,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\,\lambda \in \mathbb{R}, \quad \vec{v} = \lambda\begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}.$$

Projeté orthogonal d'un point $M(x,y)$ sur une droite (Δ). Choisir 2 points A et B appartenant à (Δ).



Poser $\overrightarrow{AH} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

On a $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB} = \lambda||\overrightarrow{AB}||^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \dfrac{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}}{||\overrightarrow{AB}||^2}$.

Puis calculer $H = A + \lambda\overrightarrow{AB}$.

III Fonctions dérivées et primitives : formulaire

Formules de dérivation. Soient u et v deux fonctions dérivables. Alors,

(i) $\boxed{(uv)' = u'v + uv'}$

(ii) $\boxed{\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}}$ et $\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}}$

(iii) $(u^\alpha)' = \alpha \times u' \times u^{\alpha-1}$, où α peut être entier relatif, rationnel, voire réel.

On rappelle l'exemple $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = (u^{-n})' = -n \times u' \times u^{-n-1} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -n\frac{u'}{u^{n+1}}}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Mais aussi, $(\sqrt{u})' = (u^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \times u' \times u^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$.

Table.

$f(x)$	x^n	$\frac{1}{x^n}$	$\cos(x)$	$\sin(x)$	e^x	$g(ax+b), a, b \in \mathbb{R}$
$f'(x)$	nx^{n-1}	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$-\sin(x)$	$\cos(x)$	e^x	$a \times g'(ax+b)$

Fonctions primitives de f. On appelle **fonction primitive** de f, toute fonction F vérifiant $F'(x) = f(x)$. Par exemple, deux fonctions primitives de $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$ sont $F(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ et $G(x) = x^2 - \frac{1}{x} + 3$.

Definition

On appelle **logarithme népérien**, notée ln, la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $]0, +\infty[$ et vérifiant $\ln(1) = 0$.