Cours MT22 - Chapitre 1

Exemple 1. Étudier la continuité en $(0,0)$ de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Correction. (i) on passe en coordonnées polaires au voisinage de $M_0(0,0)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

(ii) On évalue $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$:

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{(r\sin\theta)^3}{r^2} = r\sin^3\theta.$$

(iii) On démontre la C.S. de continuité : on estime l'écart en fonction de r

$$\forall r \in \mathbb{R}_+,\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ |f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0,0)| = r|\sin^3\theta|$$

Comme Im sin $= [-1,1]$, on a $\forall \theta \in \mathbb{R},\ |\sin^3\theta| \leq 1$. Par conséquent, en posant $g(r) = r$, on a

$$\forall r \in \mathbb{R}_+,\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ |f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0,0)| \leq g(r)$$

et $g(r) \underset{r\to 0}{\to} 0$. La condition suffisante de continuité est démontrée.

Exemple 2. Montrons que la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

n'est pas continue en $(0,0)$.

Correction. On choisit une fonction $\Phi(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ telle que $\Phi(t=0) = (0,0)$ et Φ est continue en $t = 0$ et $f \circ \Phi(t) = f(u(t), v(t))$ n'est pas continue en $t = 0$.
(i) Posons l'équation explicite $y = \lambda x$ d'une droite passant par l'origine. Les points de cette droite correspondent également à l'image de la fonction Φ définie par

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} u(t) = t \\ v(t) = \lambda t \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

La fonction Φ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\Phi(0) = (0,0)$.
(ii) Pour $\lambda \neq 0$, on calcule

$$f \circ \Phi(t) = f(t, \lambda t) = \frac{t \times \lambda t}{t^2 + \lambda^2 t^2} = \frac{\lambda t^2}{(1+\lambda^2)t^2} = \frac{\lambda}{(1+\lambda^2)} \underset{t \to 0}{\to} \frac{\lambda}{(1+\lambda^2)} \neq f \circ \Phi(t=0) = f(0,0).$$

Donc pour $\lambda \neq 0$, $f \circ \Phi$ n'est pas continue en $t = 0$.
(iii) Par contraposée d'une proposition du cours, on en déduit que f n'est pas continue en $(0,0)$.

Autres notes de cours.

Soit $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ et $M_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Alors $f(x_0, y_0) = 1.5$.
L'image graphique correspond à la résolution de $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$ avec $\varepsilon = 0.1$.

$$|x^2 + y^2 + 1 - 1.5| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x^2 + y^2 - 0.5 < \varepsilon \Leftrightarrow 0.5 - \varepsilon < x^2 + y^2 < 0.5 + \varepsilon$$

On utilisant les coordonnées polaires de $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ on obtient

$$\Leftrightarrow \sqrt{0.5 - \varepsilon} < r < \sqrt{0.5 + \varepsilon}$$

L'ensemble des solutions est une couronne et on choisit un disque centré en M_0, entièrement contenu dans cette couronne. La définition de continuité est satisfaite.