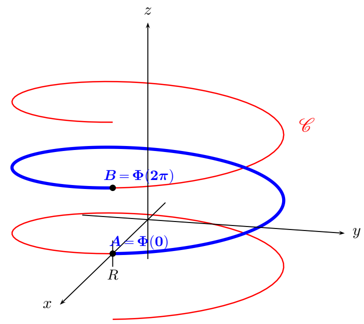
Cours MT22 - Chapitre 6

Exemple : Calculer la longueur d'une hélice paramétrée par $\Phi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ avec $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\theta) = \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ a\theta \end{pmatrix}$.

Correction. Il s'agit de la portion bleue sur le schéma ci-dessous.



$$\Phi'(\theta) = \begin{pmatrix} -R\sin\theta \\ R\cos\theta \\ a \end{pmatrix}$$

$$||\Phi'(\theta)|| = \sqrt{(-R\sin\theta)^2 + (R\cos\theta)^2 + a^2} = \sqrt{R^2(\underbrace{\sin^2\theta + \cos^2\theta}_{=1}) + a^2} = \sqrt{R^2 + a^2}$$

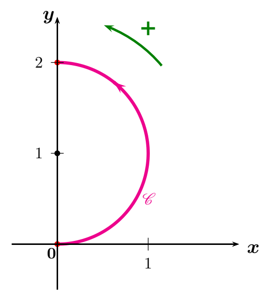
La longueur de la portion de courbe est

$$\ell(\overset{\frown}{AB}) = \int_0^{2\pi} ||\Phi'(\theta)||\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + a^2}\, d\theta = \sqrt{R^2 + a^2} \int_0^{2\pi} 1\, d\theta = 2\pi\sqrt{R^2 + a^2}.$$

NB : lors que $a = 0$ cette portion de courbe est tout simplement le cercle de rayon R et on retrouve la formule du périmètre $2\pi R$.

Exemple : Soit $\mathscr{C}$ le bord du demi-disque défini par $\mathscr{C} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + (y-1)^2 = 1 \text{ et } x \geqslant 0\}$.
Calculer $\displaystyle\int_{\mathscr{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ avec $\vec{F}(x, y) = \binom{y}{-x}$.

Correction.



• On commence par définir une paramétrisation de $\mathscr{C}$:

$$M \in \mathscr{C} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \theta \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}], \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(\theta) = \begin{pmatrix} \phi_1(\theta) = \cos\theta \\ \phi_2(\theta) = 1 + \sin\theta \end{pmatrix}.$$

• On développe le calcul avec la formule

$$\int_{\mathscr{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\mathscr{C}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b P(\phi_1(t), \phi_2(t))\phi_1'(t)dt + Q(\phi_1(t), \phi_2(t))\phi_2'(t)dt$$

dans le cas où $\mathscr{C} = \Phi([a, b])$ avec

$$x = \phi_1(t) \quad \Rightarrow \quad \tfrac{dx}{dt} = \phi_1'(t) \quad \Rightarrow \quad dx = \phi_1'(t)\, dt$$

$$y = \phi_2(t) \quad \Rightarrow \quad \tfrac{dy}{dt} = \phi_2'(t) \quad \Rightarrow \quad dy = \phi_2'(t)\, dt.$$

• Le sens trigonométrique correspond au sens des valeurs θ : $-\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2}$. On obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathscr{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin\theta) \times (-\sin\theta)d\theta + (-\cos\theta) \times \cos\theta\, d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Bigg(-\sin\theta \underbrace{-\sin^2\theta - \cos^2\theta}_{=-1} \Bigg) d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-\sin\theta - 1)d\theta \\
&= \Big[\cos\theta - \theta \Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\tfrac{\pi}{2} - \big(-(-\tfrac{\pi}{2})\big) = -\pi.
\end{aligned}$$

Exercice A.1.11 : Soit $\vec{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ z + \alpha x^2 \\ y \end{pmatrix}$ un champ de vecteur de classe $\mathscr{C}^1$ au moins.

1. On détermine la valeur de α de sorte que $\overrightarrow{\textbf{rot}}\vec{F} = 0$.

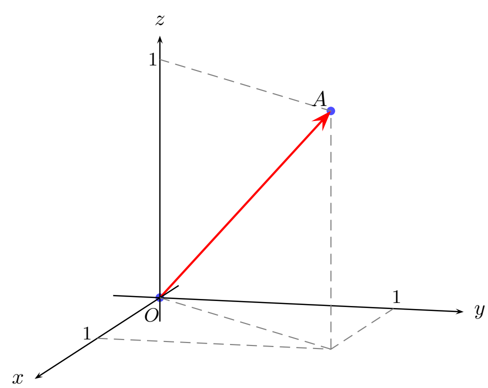
$$\overrightarrow{\textbf{rot}}\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 0-0 \\ 2\alpha x - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (2\alpha - 1)x \end{pmatrix}.$$

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ \overrightarrow{\textbf{rot}}\vec{F}(x,y,z = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2}.$$

Pour cette valeur de $\alpha = \frac{1}{2}$, on obtient $\vec{F} = \nabla f$ où

$$f(x,y,z) = \frac{x^2 y}{2} + yz + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. La courbe $\mathscr{C}$ est le chemin rectiligne orienté suivant



• On commence par calculer la circulation de $\vec{F}$ sur $\overrightarrow{OA}$ à l'aide de la définition.
Une paramétrisation de $\overrightarrow{OA}$ est

$$M \in \mathscr{C} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, t \in [0,1], \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(t) = (1-t)O + tA = \begin{pmatrix} \phi_1(t) = t \\ \phi_2(t) = t \\ \phi_3(t) = t \end{pmatrix}.$$

Le sens de parcours allant du point O au point A corresponda au sens des valeurs $t : 0 \to 1$. On obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathscr{C}} \vec{F} \cdot \vec{d\ell} &= \int_{\mathscr{C}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \\
&= \int_0^1 P(\phi_1(t),\phi_2(t),\phi_3(t))\phi_1'(t)dt + Q(\phi_1(t),\phi_2(t),\phi_3(t))\phi_2'(t)dt + R(\phi_1(t),\phi_2(t),\phi_3(t))\phi_3'(t)dt \\
&= \int_0^1 t^2 \times 1dt + (t + \frac{t^2}{2}) \times 1dt + t \times 1dt \\
&= \int_0^1 (2t + \tfrac{3}{2}t^2)dt = \left[t^2 + \frac{t^3}{2}\right]_0^1 = 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2}.
\end{aligned}$$

• On vérifie l'égalité avec

$$f(A) - f(O) = (\frac{1}{2} + 1 + C) - (C) = \tfrac{3}{2} = \int_{\mathscr{C}} \vec{F} \cdot \vec{d\ell}.$$